Die

Grundlehren

der

Stereometrie

von

A. Stegmann.

Mit 265 Lehrsätzen und Aufgaben zur Uebung
und 7 Figurentafeln.

Kempten.
Verlag der Jos. Kösel'schen Buchhandlung.
1876.

Heymann

Die Grundlehren der Stereometrie

von

N. Stegmann.

Mit 265 Lehrsätzen und Aufgaben zur Uebung, und 7 Figurentafeln.

Kempten.

Verlag der Jos. Kösel'schen Buchhandlung.

1875.

Buchdruckerei der Jos. Kösel'schen Buchhandlung in Kempten.

Vorwort.

„Versprechen macht halten" und so erscheinen „Die Grundlehren der Stereometrie", nach denselben leitenden Gesichtspunkten ausgearbeitet, wie jene der ebenen Geometrie.

Was in letzterer nur beschränkt geschehen ist, konnte hier in ausgedehnterem Maße verlangt werden, daß nämlich, nachdem die Beweise anfangs ganz vollständig gegeben sind und der Schüler allmählig die nöthige Anschauung gewonnen hat, derselbe auch allmählig angehalten wird, theils Beweise zu vervollständigen, theils ganz zu suchen oder nachzubilden, und da überdieß 265 Lehrsätze und Aufgaben zur Uebung beigegeben sind, so wird es an Stoff für Selbstthätigsein des Schülers nicht fehlen.

Diese Aufgaben und Lehrsätze sind theils altbekannt, theils fußen sie auf Absolutorial-Aufgaben, theils sind sie von mir entworfen, und die Aufgaben der letzteren Art geben fast durchaus Auflösungen, welche in der Form und für die Construction einfach sind. Es sind unter den Lehrsätzen und Aufgaben, im Ganzen genommen, nur wenige, welche die Beihilfe des Lehrers nöthig machen.

Eine günstige Aufnahme dieser Sammlung würde mich ermuthigen, auch für die ebene Geometrie eine solche auszuarbeiten.

Den Schluß dieses Vorwortes bilde der Wunsch, eine nützliche Arbeit geliefert zu haben und dieselbe gut aufgenommen zu sehen.

München, in den Herbstferien 1875.

Der Verfasser.

Inhalt.

Stereometrie.

1. Erklärung.

Die **Stereometrie** ist derjenige Theil der Geometrie, welcher sich nicht auf Raumgrößen in **einer** Ebene beschränkt.

Bezeichnung der Ebene, (I. 1), Eb. MN, Eb. ABM, Eb. PQ.

Erster Abschnitt.

A. Gerade und Ebene überhaupt.

2. Lehrsatz.

Die Lage einer Ebene ist bestimmt durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte.

Beweis. Wird (I. 2) Eb. mn in einer Lage gedacht, daß sie mit Eb. MN die Punkte A, B, C gemein hat, so muß auch jeder beliebige andere Punkt der einen der beiden Ebenen zugleich ein Punkt der andern Ebene sein.

Denkt man sich nämlich die drei Punkte durch Gerade verbunden, so sind alle Punkte dieser Verbindungslinien und ihrer Verlängerungen beiden Ebenen gemeinsam [Ebene Geometrie 6].

Wählt man nun in einer der beiden Ebenen einen beliebigen andern Punkt, innerhalb oder außerhalb des Dreieckes ABC, so

kann man durch denselben immer eine Parallele zu einer der Seiten ziehen, durch welche die beiden andern Seiten oder ihre Verlängerungen geschnitten werden.

Die Parallele hat mit jeder der beiden Ebenen die genannten zwei Schnittpunkte gemein, liegt also in jeder der beiden Ebenen zugleich, somit ist auch der Punkt, durch welchen sie gezogen wurde, beiden Ebenen gemeinsam.

Unter der gemachten Voraussetzung kann also gezeigt werden, daß jeder beliebige Punkt der einen Ebene zugleich ein Punkt der andern Ebene ist, also müßen beide Ebenen in eine zusammenfallen, somit einerlei Lage haben.

Die Lage der Ebene ist also durch drei nicht in einer Geraden liegenden Punkte bestimmt.

3. Zusatz.

Die Lage einer Ebene ist also auch bestimmt durch eine Gerade und einen Punkt außerhalb derselben, durch zwei sich schneidende oder parallele Gerade, durch einen Kreis oder auch Kreisbogen u. s. w.

4. Erklärung.

Sind die Punkte einer Geraden, zweier sich schneidender oder paralleler Geraden alle zugleich auch Punkte einer Ebene, so sagt man: die Geraden liegen in der Ebene, oder auch: die Ebene ist durch sie gelegt.

5. Grundsatz.

Wie eine Ebene durch eine in ihr liegende, fort und fort verlängerte Gerade, so wird der Raum durch eine allseitig und ohne Ende erweiterte Ebene in zwei vollständig getrennte Theile zerlegt, weßwegen wie bei der Geraden so auch bei der Ebene zwei Seiten unterschieden werden können.

6. Erklärung.

Werden zwei in der Lage verschiedene Ebenen allseitig und ohne Ende erweitert gedacht, so

1) haben sie entweder keinen Punkt gemein
2) oder es ist dieß nicht der Fall.

Haben zwei Ebenen bei beliebiger Erweiterung keinen Punkt gemein, so heißen sie parallel.

7. Erklärung.

Denkt man sich im Raume eine Gerade ohne Ende verlängert und eine Ebene ohne Ende erweitert, so kann die Gerade

1) mit der Ebene keinen Punkt gemein haben, und dann heißen sie parallel; oder

2) die Gerade und die Ebene haben nur einen Punkt gemein, und dann heißt der gemeinsame Punkt Schnittpunkt oder auch Fußpunkt der Geraden und man sagt, die Gerade und die Ebene schneiden sich; oder

3) die Gerade hat mit der Ebene mehr als einen Punkt gemein und liegt dann ganz in der Ebene.

8. Lehrsatz.

Verbindet eine Gerade zwei Punkte, von denen der eine auf der einen, der andere auf der andern Seite einer allseitig und ohne Ende erweiterten Ebene liegt, so muß die Gerade die Ebene schneiden.

Beweis. Da die Ebene den Raum in zwei vollständig gesonderte Theile zerlegt, so kann eine ununterbrochene Gerade zwei Punkte der angegebenen Art z. B. A und A′ (I. 3) nur dann verbinden, wenn sie irgendwo durch die Grenze geht, also die Ebene MN schneidet.

Hätte nämlich die Gerade AA′ mit Ebene MN mehr als einen Punkt gemein, so müßten auch A und A′ in dieser Ebene liegen, was gegen die Voraussetzung ist.

9. Lehrsatz.

Haben zwei in der Lage verschiedene Ebenen mehrere Punkte gemein, so müßen diese Punkte in einer Geraden liegen.

Beweis. Lägen nämlich (I. 4) von diesen Punkten irgend drei nicht in einer Geraden, so müßten die beiden Ebenen dieselbe Lage haben [2], was gegen die Voraussetzung ist.

10. Lehrsatz.

Haben zwei Ebenen einen Punkt gemein, so müßen sie, gehörig erweitert, eine Gerade gemeinsam haben.

Beweis. Haben (I. 5) die Ebenen MNc und mnc den Punkt c gemein, so sei ein beliebiger Punkt der Ebene mnc z. B. p durch eine Gerade mit c verbunden und diese Gerade über c hinaus verlängert bis zu einem beliebigen Punkte p′, so liegt p′ in der (erweiterten) Ebene mnc, aber nicht auf der Seite von Eb. MNc, auf welcher p liegt.

Wählt man nun in der Ebene mnc und zwar auf derselben Seite von MNc auf welcher p′ liegt, aber nicht in der Geraden p′p, einen beliebigen Punkt p″, und zieht p″p, so muß diese Gerade die Ebene MNc schneiden, und der Schnittpunkt, er heiße c′, muß auch in der Ebene mnc liegen.

Dasselbe kann für beliebig viele solche Punkte wie p″ bewiesen werden, so daß also die beiden Ebenen beliebig viele Punkte gemein haben müssen.

Alle diese Punkte müssen aber [9] in einer Geraden liegen, also haben die beiden Ebenen eine Gerade gemein.

11. Erklärung.

Haben zwei (in der Lage verschiedene) Ebenen eine Gerade gemeinsam, so sagt man, sie schneiden sich, und die Gerade heißt Kante.

12. Lehrsatz.

Zieht man durch einen beliebigen Punkt der Kante zweier Ebenen in einer derselben eine beliebige Gerade, dann in der andern Ebene auch eine beliebige Gerade nur nicht durch den genannten Punkt, so können diese Geraden weder parallel sein, noch auch sich schneiden.

Beweis. Es sei (I. 6) in Eb. MNO durch Punkt a der Kante AO die Gerade ab gezogen, und in der Ebene MN′O die Gerade a′b′, gleichgiltig ob parallel zur Kante oder nicht, so müßte, wenn ab und a′b′ sich schnitten oder parallel wären, sich durch ab und a′b′ eine Ebene legen lassen, und diese Ebene müßte der Punkte a, a′ und b′ wegen mit Ebene MN′O zusammenfallen, daher müßte auch Punkt b in Ebene MN′O liegen, was unmöglich ist [9].

13. Erklärung.

Zwei Gerade, welche weder parallel sind, noch auch sich schneiden können, heißen sich kreuzende Gerade.

B. Parallelismus der Geraden und Ebenen.

14. Lehrsatz.

Zu einer Geraden gibt es im Raume unzählige Parallelen.

Beweis. Durch eine Gerade und jeden beliebigen Punkt außerhalb derselben läßt sich eine Ebene legen und in jeder dieser unzähligen Ebenen lassen sich durch beliebig viele Punkte Parallelen zu der Geraden ziehen.

15. Lehrsatz.

Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden gibt es zu derselben (auch im Raume) nur eine Parallele.

Beweis. Es sei (I. 7.) außerhalb der Geraden AB der Punkt C gegeben, so kann man durch AB und C eine Ebene ABM legen und in dieser durch C ab || AB ziehen.

Gesetzt aber, es gäbe durch C noch eine zweite Parallele zu AB, z. B. a'b', so könnte man durch AB und a'b' als zwei Parallelen eine Ebene legen, aber diese Ebene müßte mit Ebene ABM zusammenfallen, weil sie auch durch AB und Punkt c gelegt wäre. Sonach müßte a'b' auch in der Ebene ABM liegen, und wenn es von ab verschieden wäre, hätte man in derselben Ebene durch einen Punkt zu derselben Geraden zwei verschiedene Parallelen, was unmöglich ist.

Da nun die nothwendige Folge der Annahme unmöglich ist, u. s. w.

16. Lehrsatz.

Wenn eine von zwei Parallelen eine Ebene schneidet, so muß auch die andere, (genugsam verlängert) die Ebene schneiden.

Beweis. Ist (I. 8.) AB || A'B' und schneidet AB die Ebene MN im Punkte B, so hat eine durch AB und A'B' gelegte Ebene mit MN den Punkt B gemein und schneidet also MN in einer Geraden, welche BC heiße.

Nun liegen AB, A'B' und BC in der Ebene AB, A'B', also muß (E. G. 55,2) auch A'B' die BC schneiden, daher mit der Ebene MN den Schnittpunkt B'' gemein haben.

Einen zweiten Punkt kann aber A'B' mit Ebene MN nicht

gemein haben, denn sonst müßte A'B' mit BC zusammenfallen [9], was unmöglich ist, da A'B' || AB ist.

17. Zusatz.

Wenn eine von zwei Parallelen (außerhalb einer Ebene) zu der Ebene parallel ist, so ist auch die andere der Ebene parallel.

Beweis, indirect.

18. Lehrsatz.

Ist eine Gerade außerhalb einer Ebene parallel zu einer Geraden in der Ebene, so ist die erstere Gerade auch parallel zur Ebene.

Beweis. Ist (I. 9.) AB || ab und liegt AB außerhalb der Ebene MN, ab aber in derselben, so kann man durch AB und ab eine Ebene legen.

Schnitte nun AB die Ebene MN, so müßte der Schnittpunkt sowohl ein Punkt der Ebene AB, ab sein, in welcher AB liegt, als auch ein Punkt der geschnittenen Ebene MN, daher ein Punkt der Kante ab.

Schnitte also AB die Ebene MN, so müßte AB auch ab schneiden, was unmöglich ist.

19. Lehrsatz.

Wenn eine Gerade zu einer Ebene parallel ist und man legt durch die Gerade und einen beliebigen Punkt der Ebene eine zweite Ebene, so ist die Kante beider Ebenen zur Geraden parallel.

Beweis, indirect. Angenommen, die Kante (I. 9.) ab einer durch AB, welche Gerade || Ebene MN sei, und einen Punkt von MN gelegten Ebene wäre nicht parallel zu AB, so müßten diese zwei Geraden, da sie in einer Ebene liegen, sich schneiden, also AB die Ebene MN schneiden, was unmöglich ist.

20. Lehrsatz.

Ist eine Gerade außerhalb einer Ebene zu einer von zwei sich schneidenden Geraden in der Ebene parallel, so muß die Gerade außerhalb der Ebene die nicht parallele Gerade kreuzen.

Beweis. Ist (I. 10.) AB außerhalb Ebene MN, ab und a'b' in dieser Ebene, und ist AB || ab, so müssen AB und a'b' sich kreuzende Gerade sein.

Wir zeigen nun, daß AB und a'b' 1) sich nicht schneiden, und 2) auch nicht parallel sein können.

Zu 1) Da AB || Eb. MN ist, so kann AB mit Eb. MN keinen Punkt gemein haben, also auch nicht mit a'b', weil a'b' in Ebene MN liegt.

Zu 2). Auch kann AB nicht || a'b' sein, wegen 15.

21. Lehrsatz.

Schneiden sich drei Ebenen (nur) zu je zweien und sind zwei von den drei Kanten einander parallel, so ist auch die dritte Kante zu ihnen parallel.

Beweis. Ist (I. 11) AB || EF, so kann CD diese beiden Geraden 1) weder kreuzen, noch 2) sie schneiden.

Zu 1). CD liegt mit AB in Ebene AD, und mit EF in Ebene CF, kann also keine von diesen zwei Geraden kreuzen.

Zu 2). Gesetzt, CD schnitte AB, so wäre der Schnittpunkt
als Punkt von AB auch ein Punkt der Ebene AF, und
als Punkt von CD auch ein Punkt der Ebene CF,
daher müßte dieser Schnittpunkt in der Kante EF beider Ebenen liegen, also müßten AB und EF sich schneiden, was unmöglich ist.

Ebenso kann gezeigt werden, daß CD die EF nicht schneiden kann.

Da nun CD die beiden Kanten AB und EF weder kreuzen noch schneiden kann, so ist sie parallel zu denselben.

22. Lehrsatz.

Schneiden sich drei Ebenen (nur) zu je zweien und schneiden sich zwei von den drei Kanten, so muß auch die dritte Kante durch diesen Schnittpunkt gehen.

Beweis. Aehnlich wie 20. oder indirect.

23. Zusatz.

Werden zwei sich schneidende Ebenen von einer dritten geschnitten in Geraden nicht parallel zur Kante der ersteren zwei Ebenen, so schneiden sich alle drei Kanten in einem Punkte.

24. Lehrsatz.

Sind zwei Gerade zur nämlichen dritten parallel, so sind sie auch unter sich parallel.

Beweis. Ist (II. 1) sowohl AB als CD || EF, so muß auch AB || CD sein.

Angenommen nämlich, es wäre AB nicht || CD, so kann man doch durch AB und den in CD beliebig gewählten Punkt G eine Ebene legen und die Ebene ABG muß die Ebene CF in CD schneiden.

Wäre nämlich nicht CD die Kante sondern z. B. C'D', so hättten wir drei Ebenen, die sich in den Kanten AB, C'D' und EF schnitten, und da AB und EF als parallel vorausgesetzt sind, so müßte auch C'D' || EF sein [21], was unmöglich ist, da in der Ebene CF durch G bereits CD || EF vorhanden ist.

25. Lehrsatz.

Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten, so sind die Kanten parallel.

Beweis. Sind AB und ab (II. 2) die Kanten der von Ebene Nn geschnittenen parallelen Ebenen ABM und abm, so muß AB || ab sein.

Da nämlich AB und ab beide in der Ebene Nn liegen, so können sie sich nicht kreuzen, und wenn sie sich schnitten, so müßte ihr Schnittpunkt sowohl in Ebene ABM als in Ebene abm liegen, was unmöglich ist, da diese Ebenen als parallel vorausgesetzt sind.

26. Lehrsatz.

Liegen zwei Winkel in verschiedenen Ebenen und sind ihre Schenkel bezüglich parallel, so sind auch die Ebenen parallel.

Beweis. Ist (II. 3) AB || ab und AC || ac, so ist Ebene BAC || Ebene bac.

Angenommen, Ebene BAC wäre nicht parallel Ebene bac, so müßten diese Ebenen sich schneiden, z. B. in DE.

Nun kann DE jedenfalls nicht beiden Schenkelpaaren zugleich parallel sein, und wir nehmen an, es ist nicht parallel zu AC und ac, so müßte DE, gleichgiltig ob DE parallel zu AB und ab ist oder nicht, sowohl AC als ac schneiden. Dies kann aber weder in ei-

nem Punkte geschehen, weil AC || ac ist, noch auch in zwei Punkten, weil sonst DE in der Ebene Ac, ac liegen und demnach [3, sich schneid. G.] Ebene BAC sowohl als Ebene abc mit der Ebene AC, ac zusammenfallen, also die vier Schenkel in einer Ebene liegen müßten, was gegen die Voraussetzung ist.

Einfacher und ebenfalls indirect, mit [21].

27. Lehrsatz.

Durch jeden Punkt außerhalb einer Ebene gibt es zu derselben eine parallele Ebene.

Beweis. Denkt man sich (II. 4) in der Ebene MN zwei beliebige sich schneidende Gerade gezogen z. B. ab und ac, so kann man durch den außerhalb der Ebene gegebenen Punkt A und durch jede dieser beiden Geraden eine Ebene legen, und diese beiden Ebenen müßen sich in Aa schneiden.

Denkt man sich nun in der Ebene Aab AB || ab, und in der Ebene Aac AC || ac gezogen und durch AB und AC eine Ebene gelegt, so ist Ebene BAC || Ebene MN.

28. Lehrsatz.

Durch jeden Punkt außerhalb einer Ebene gibt es zu derselben nur eine parallele Ebene.

Beweis. Angenommen, es gäbe (II. 4) durch Punkt A außer Ebene BAC noch eine andere zu Ebene bac parallele Ebene, und es werde diese Ebene von Ebene baA in AB′ geschnitten, so müßte sowohl AB′ als AB || ab sein, was unmöglich ist.

Bemerkung. Aufgabe: Durch einen Punkt außerhalb einer Ebene zu derselben eine Ebene parallel zu legen.

29. Zusatz.

1) Schneidet eine Ebene die eine von zwei parallelen Ebenen, so muß sie genugsam erweitert, auch die andere schneiden.

2) Sind zwei Ebenen zur nämlichen dritten parallel, so sind sie auch unter sich parallel.

30. Lehrsatz.

Schneidet eine Gerade die eine von zwei parallelen Ebenen, so schneidet sie, genugsam verlängert, auch die andere.

Beweis. Eine durch die Gerade gelegte Ebene schneidet, genugsam erweitert, auch die andere Ebene und die Kanten sind parallel, also muß die Gerade auch die Kante der zweiten Ebene, somit die zweite Ebene selbst schneiden.

31. Zusatz.

Ist eine Gerade zu einer von zwei parallelen Ebenen parallel, so ist sie auch zur andern parallel.

32. Lehrsatz.

Durch jede von zwei sich kreuzenden Geraden läßt sich eine Ebene legen, welche zur andern parallel ist.

Beweis. Sind (II. 5) AB und ab zwei sich kreuzende Gerade, so kann man z. B. durch ab und einen beliebigen Punkt C von AB eine Ebene legen und in dieser Ebene CD || ab ziehen. Legt man nun durch AB und CD eine Ebene, so ist diese parallel zu ab.

33. Lehrsatz.

Legt man durch jede von zwei sich kreuzenden Geraden eine Ebene parallel zur andern kreuzenden Geraden, so sind die beiden Ebenen parallel.

Beweis. Angenommen die beiden Ebenen wären nicht parallel, so müßten sie sich schneiden, und würde eine der beiden sich kreuzenden Geraden die Kante schneiden, so müßte dieselbe Gerade im selben Punkte auch die zu ihr parallele Ebene schneiden. Sonach müßten die beiden sich kreuzenden Geraden, da jede mit der Kante in einer Ebene liegt, parallel zur Kante sein, also selbst parallel, was unmöglich ist.

34. Lehrsatz.

Parallele Gerade zwischen parallelen Ebenen sind gleich.

Beweis. Durch zwei parallele Gerade kann man eine Ebene legen und die Kanten bilden mit den gegebenen zwei parallelen Geraden ein Parallelogramm.

35. Lehrsatz.

Zieht man von beliebig vielen Punkten einer Ebene und zwar auf der nämlichen Seite derselben

Gerade, welche alle gleich und zu einander parallel sind, so liegen die Endpunkte all dieser Geraden in einer Ebene, welche zur gegebenen parallel ist.

Beweis. Denkt man sich einen beliebigen von den Punkten mit zweien derselben durch Gerade verbunden und durch die Verbindungslinien eine Ebene gelegt, so ist diese zur gegebenen Ebene parallel [26], und muß alle andere Parallelen schneiden, und zwar [34] im Endpunkte.

36. Lehrsatz.

Sind die Schenkel zweier Winkel parallel und liegen je zwei parallele Schenkel auf derselben Seite einer durch die andern gelegten Ebene, so sind die Winkel gleich.

Beweis. Durch AB || ab und AC || ac (II. 6) gelegte Ebenen schneiden sich in Aa, und es entsteht, wenn auf AB AB′ beliebig und auf ab ab′ = AB′ genommen und B′b′ gezogen wird, ein Parallelogramm A′B b′a, daher ist

1) B′b′ parallel und gleich Aa.

Nimmt man ferner auf AC AC′ beliebig und auf ac ac′ = AC und zieht C′c′, so ist auch die Verbindungslinie

2) C′c′ parallel und gleich Aa.

Aus 1) u. 2) folgt, daß B′b′ parallel und gleich C′c′ ist, und daß, wenn man durch B′b′ und C′c′ eine Ebene legt, welche die Ebenen der Winkel bezüglich in B′C′ und b′c′ schneidet, ein Parallelogramm B′C′c′b′ entsteht, weßwegen B′C′ = b′c′ sein muß.

Nun ist $\triangle$ B′AC′ $\cong$ $\triangle$ b′ac′ (III), daher $\wedge$ BAC = $\wedge$ bac.

C. Ebene und Senkrechte.

37. Lehrsatz.

Durch einen Punkt einer Geraden gibt es auf dieselbe (im Raume) unzählig viele Senkrechte.

Beweis. Durch eine Gerade lassen sich unendlich viele Ebenen legen und in jeder dieser Ebenen gibt es durch den betreffenden Punkt eine Senkrechte auf die Gerade, also unzählig viele Senkrechte.

38. Lehrsatz.

Durch jeden Punkt außerhalb einer Geraden gibt es auf dieselbe (auch im Raume) nur eine Senkrechte.

Beweis. Durch eine Gerade und einen Punkt außerhalb läßt sich nur eine Ebene legen und in dieser von dem gegebenen Punkte aus auf die Gerade eine Senkrechte fällen.

Wollte man aber annehmen, es gebe noch eine zweite Senkrechte, so müßte diese mit der bereits gelegten Ebene sowohl den gegebenen Punkt als auch den Fußpunkt gemein haben, der ja in der gegebenen Geraden liegen müßte, daher müßte diese zweite Senkrechte auch in der gelegten Ebene liegen, also mit der ersten Senkrechten zusammenfallen.

39. Erklärung.

Schneidet eine Gerade eine Ebene und steht sie senkrecht auf allen Geraden, welche in dieser Ebene liegen und durch den Fußpunkt gehen, so sagt man, die Gerade steht senkrecht auf der Ebene, und die Ebene senkrecht auf der Geraden.

Schneidet eine Gerade eine Ebene und steht sie nicht senkrecht auf derselben, so sagt man, die Gerade steht schief auf derselben.

40. Lehrsatz.

Steht eine Gerade auf zwei in einer Ebene liegenden Geraden im Fußpunkt senkrecht, so steht sie auch senkrecht auf der Ebene, welche durch diese zwei Geraden bestimmt ist.

Beweis. Es stehe (II. 7) $AB \perp BC$ und $\perp BD$, so soll es auch $\perp$ Eb. C, B, D stehen, was der Fall ist, wenn es senkrecht steht auf allen Geraden, welche in dieser Ebene durch den Fußpunkt gezogen werden können.

Es sei nun zunächst BE gezogen, in der Ebene C, B, D und zwischen BC und BD, und um zu zeigen, daß $AB \perp BE$ steht, sei

1) AB über B hinaus verlängert um $BA' = AB$, ferner

2) A und A' durch Gerade mit einem beliebigen Punkte von BC, z. B. mit C selbst verbunden und die Ebene ABC*) gelegt, so ist

$$\triangle ABC \cong \triangle A'BC \text{ (I), also } AC = A'C.$$

3) Ebenso seien A und A' durch Gerade mit D verbunden, so ist

$$\triangle ABD \cong \triangle A'BD, \text{ also } AD = A'D.$$

---

*) Ebenso in allen ähnlichen Fällen, auch wenn es nicht besonders angegeben ist.

4) Zieht man nun die Gerade CD, so ist
$\triangle$ ACD $\cong$ $\triangle$ A'CD (III), also $\wedge$ ACD = $\wedge$ A'CD.

5) Bezeichnet man den Schnittpunkt von CD und BE mit F, und zieht AF und A'F, so ist

$\triangle$ ACF $\cong$ $\triangle$ A'CF (I), also AF = A'F.

6) Endlich ist $\triangle$ ABF $\cong$ $\triangle$ A'BF (III), also

$\wedge$ ABF = $\wedge$ A'BF, und, da dies Nebenwinkel sind,

$\wedge$ ABF = R, d. h.

AB steht senkrecht auf BF, oder senkrecht auf BE.

Für jede andere Gerade, welche in der Ebene C,B,D liegt und durch den Punkt B geht, kann auf dieselbe Art, jedoch nöthigenfalls mit Verlängerung von BC und BD über B' hinaus, bewiesen werden, daß AB auf ihr senkrecht steht.

Es steht also AB senkrecht auf allen Geraden, welche in der Ebene C, B, D durch den Fußpunkt B gezogen werden können, also steht AB $\perp$ Ebene C, B, D (oder Ebene MN).

41. Lehrsatz.

Steht eine Gerade in demselben Punkte senkrecht auf drei oder mehreren Geraden, so liegen diese drei oder mehreren Geraden in einer Ebene.

Beweis. Es stehe (II. 8) AB senkrecht auf den drei Geraden BC, BD und BE, so müßen diese drei Geraden in einer Ebene liegen.

Angenommen, diese drei Geraden lägen nicht in einer Ebene, so kann man doch durch zwei von ihnen, z. B. durch BC und BE eine Ebene legen, ebenso durch AB und die dritte Gerade BD, und die beiden Ebenen müssen sich dann in BD schneiden.

Gesetzt nämlich, die Kante beider Ebenen wäre nicht BD, so müßte diese Kante doch durch den Punkt B gehen und wenn sie z. B. BD' sein sollte, so müßte
AB $\perp$ BD' stehen, weil AB $\perp$ BC und BD, also $\perp$ Ebene B,C,D steht, daher auch $\perp$ BD' stehen müßte, welches in der Ebene B, C, D läge, als Kante von Ebene A,B,D und Ebene B,C,D.

Sonach hätten wir in der Ebene A,B,D auf dieselbe Gerade AB im nämlichen Punkte B zwei verschiedene Senkrechte BD und BD', was unmöglich ist.

42. Lehrsatz.

Durch jeden Punkt einer Geraden läßt sich eine Ebene legen, welche senkrecht auf der Geraden steht, aber nur eine.

Beweis. Es seien (II. 9) durch die Gerade AB zwei sich schneidende Ebenen gelegt, AM und AN, sodann in Ebene AM durch den gegebenen Punkt C eine Senkrechte DC auf AB hergestellt, und ebenso in Ebene AN EC ⊥ AB.

Legt man nun durch EC und DC eine Ebene, so steht AB ⊥ Ebene D, C, E.

Wollte man aber durch C noch eine zweite Ebene ⊥ AB legen, und wäre CD′ ihre Kante mit Ebene AM, so müßte ∧ ACD′ = R = ∧ ACD sein, was unmöglich ist.

Bemerkung. Aufgabe.

43. Lehrsatz.

Durch jeden Punkt außerhalb einer Geraden läßt sich eine Ebene senkrecht auf die Gerade legen, aber nur eine.

Beweis. Es sei (II. 10) durch AB und durch den außerhalb AB liegenden Punkt C eine Ebene gelegt und in ihr CD ⊥ AB hergestellt.

Legt man nun durch AB eine beliebige, jedoch die Ebene A, B, C schneidende Ebene, und fällt in ihr ED ⊥ AB, so steht eine durch C, D, E gelegte Ebene ⊥ AB.

Wollte man aber annehmen, es lasse sich durch C noch eine andere Ebene ⊥ AB herstellen, so sei CD′ ihre Kante mit Ebene C, A, B, dann müßte diese Kante auch ⊥ AB stehen, was unmöglich ist.

Bemerkung. Aufgabe.

44. Lehrsatz.

Steht eine Gerade senkrecht auf zwei Ebenen, so sind sie parallel.

Beweis. Angenommen, die beiden Ebenen schnitten sich, und es wäre irgend ein Punkt der Kante durch Gerade mit den beiden Fußpunkten der senkrechten Geraden verbunden, so ergäbe sich ein Dreieck mit zwei einzelnen R, was unmöglich ist.

Oder: Durch die Gerade zwei sich schneidende Ebenen, dann 39 u. 26.

45. Zusatz.

1) Steht eine Gerade auf einer von zwei Ebenen senkrecht, auf der andern aber schief, so müßen diese Ebenen sich schneiden.

2) Steht eine Gerade auf einer von zwei parallelen Ebenen senkrecht, so steht sie auch auf der andern senkrecht.

3) Steht eine von zwei parallelen Ebenen auf einer Geraden senkrecht, so steht auch die andere darauf senkrecht.

46. Lehrsatz.

Steht von zwei parallelen Geraden die eine auf einer Ebene senkrecht, so steht auch die andere darauf senkrecht.

Beweis. Ist (II. 11) AB || A'B' und AB ⊥ Eb. MN, so muß auch A'B' ⊥ Eb. MN sein, was nach 40. der Fall ist, wenn A'B' senkrecht steht auf zwei Geraden, welche durch B' gehen und in Eb. MN liegen.

Zieht man nun in der Ebene MN durch B zwei beliebige sich schneidende Gerade BC und BD, dann B'C' || BC und B'D' || BD, so ist

1) ∧ A'B'C' = ∧ ABC = R und

2) ∧ A'B'D' = ∧ ABD = R, also A'B' ⊥ Eb. MN.

Bemerkung. Beweis mit BB' statt der einen der hergestellten Parallelen.

47. Lehrsatz.

Legt man durch einen beliebigen Punkt der Kante zweier Ebenen eine Ebene senkrecht auf diese Kante, und fällt von einem beliebigen Punkte der einen der beiden neuen Kanten eine Senkrechte auf die andere, so steht diese Senkrechte auch senkrecht auf der Ebene, in welcher ihr Fußpunkt liegt.

Beweis. Ist (III. 1) Ebene CDE ⊥ AB und CF ⊥ DE, so muß CF ⊥ Ebene ABN stehen.

Denkt man sich nämlich FG || AB gezogen, so steht GF ⊥ Ebene CDE [46], also auch ⊥ FC, oder CF ⊥ FG, und da ohnehin CF ⊥ DE, so ist CF ⊥ Ebene ABN.

48. Lehrsatz.

Durch einen Punkt außerhalb einer Ebene gibt es immer eine Senkrechte auf dieselbe, aber nur eine.

Beweis. Sei (III. 1) außerhalb der Ebene ABN der Punkt C gegeben, so kann man durch C eine Ebene legen, welche die Eb. ABN schneidet, und die Kante sei AB.

Fällt man nun CD $\perp$ AB, und in Eb. ABN DE $\perp$ AB, sodann CF $\perp$ DE, so steht CF $\perp$ Eb. ABN.

Wollte man aber annehmen, es gäbe durch C noch eine zweite Senkrechte auf Ebene ABN, so müßten die beiden Senkrechten und die Verbindungslinie ihrer Fußpunkte ein Dreieck mit zwei einzelnen R bilden, was unmöglich ist.

Bemerkung. Aufgabe.

49. Lehrsatz.

Fällt man von einem beliebigen Punkte außerhalb einer Ebene eine Senkrechte auf dieselbe, hierauf vom Fußpunkte eine Senkrechte auf eine beliebige in der Ebene liegende Gerade, und verbindet den Fußpunkt der zweiten Senkrechten mit einem beliebigen Punkte der zweiten, so steht die Verbindungslinie senkrecht auf der beliebigen Geraden.

Beweis. Ist (III. 2) CE $\perp$ Ebene ABM, ED $\perp$ AB und D mit dem Punkte F von CE verbunden, so ist FD $\perp$ AB.

Es sei auf AB DG = DG' genommen, und seien GE und G'E gezogen, so ist

1) $\triangle$ DGE $\cong$ $\triangle$ DG'E, also GE = G'E.

Zieht man noch GF und G'F, so ist

2) $\triangle$ GEF $\cong$ $\triangle$ G'EF, also GF = G'F, und

3) $\triangle$ DGF $\cong$ $\triangle$ DG'F, also

ist $\wedge$ GDF = $\wedge$ G'DF = R.

Bemerkung. Man kann auch statt ED FD $\perp$ AB voraussetzen, und dann auf ähnliche Art zeigen, daß ED $\perp$ AB sein muß.

50. Lehrsatz.

Durch jeden Punkt einer Ebene läßt sich 1) eine Gerade ziehen, welche auf der Ebene senkrecht steht, aber 2) nur eine.

Beweis. Man kann (III. 3) von einem beliebigen Punkte außerhalb der Ebene eine Senkrechte auf dieselbe fällen, und der Fußpunkt ist entweder der gegebene Punkt A oder irgend ein anderer Punkt der Ebene z. B. C.

Im ersten Falle bedarf die Behauptung keines Beweises, und im zweiten Falle kann man durch BC und A eine Ebene legen und in derselben DA || BC ziehen, so ist DA $\perp$ Ebene MN.

Gäbe es außer DA noch eine zweite Senkrechte z. B. D'A, so ließe sich durch DA und D'A eine Ebene legen, deren Kante mit Ebene MN AE heiße, so müßte in der Ebene D,A,D' sowohl DA als D'A ⊥ AE stehen, was unmöglich ist.

51. Lehrsatz.

Stehen zwei Gerade auf derselben Ebene senkrecht, so sind sie parallel.

Beweis. Ist (Ill. 3) sowohl BC als DA ⊥ Ebene MN, so muß BC || DA sein.

Wir suchen zu zeigen, daß die beiden Senkrechten in einer Ebene liegen.

Gesetzt, es wäre dieß nicht der Fall, so könnte man durch BC und A eine Ebene legen und in dieser die D'A || BC ziehen, und dann müßte außer DA auch D'A ⊥ Ebene MN stehen, was unmöglich ist. [50].

52. Zusatz.

Senkrechte zwischen parallelen Ebenen sind gleich.

53. Lehrsatz.

Die Senkrechte ist die kürzeste von allen Geraden, welche denselben Punkt außerhalb einer Ebene mit beliebig vielen Punkten in der Ebene verbinden, und umgekehrt.

Beweis. Aehnlich Ebene Geometrie.

54. Lehrsatz.

Sind von demselben Punkte außerhalb einer Ebene gleiche schiefe Gerade an Punkte der Ebene gezogen und vom nämlichen Punkte eine Senkrechte auf die Ebene gefällt, so stehen die Fußpunkte der schiefen Geraden vom Fußpunkt der Senkrechten gleich weit ab.

Beweis. Einfach.

Zweiter Abschnitt.

Flächen- und Neigungswinkel.

A. Flächenwinkel.

55. Erklärung.

Durch zwei sich schneidende Ebenen, welche, nicht über die Kante hinaus, sonst aber allseitig und ohne Ende erweitert gedacht werden, wird der Raum in zwei Theile zerlegt, von denen jeder ein Flächenwinkel ist.

Die Kante nennt man den Scheitel, die Ebenen die Schenkel des Flächenwinkels.

56. Bezeichnung der Flächenwinkel.

Die Bezeichnung der Flächenwinkel erfolgt auf verschiedene Arten, wovon die einfachsten sind:

1) Bezeichnung zweier Buchstaben am Scheitel, z. B. (lll. 4. a), $\wedge$ AB.

2) Bezeichnung von vier Punkten, nämlich zwei am Scheitel, einer in der einen, und einer in der andern Ebene, z. B. (lll. 4. b) $\wedge$ MABO. Letztere Bezeichnung, bei welcher die Buchstaben am Scheitel in der Mitte gelesen werden, wird angewendet, wenn die erstere Art undeutlich wäre.

57—70. Erklärungen und Lehrsätze.

57. Vergleichung der Flächenwinkel.
58. Gleiche Flächenwinkel sind congruent.
59. Gerade Flächenwinkel.
60. sind gleich.
61. Flächen-Nebenwinkel; zwei gleich einem geraden Flächenwinkel.
62. Rechter Flächenwinkel

63. gleich dem halben geraden Flächenwinkel, also alle rechten gleich.
64. Ein gerader Flächenwinkel gleich zwei rechten und umgekehrt.
65. Wenn zwei Flächenwinkel den Scheitel und einen Schenkel gemein haben und zusammen gleich sind einem geraden, so liegen die beiden andern Schenkel in einer Ebene.
66. Schiefe Flächenwinkel, spitz, stumpf.
67. Ebene auf Ebene senkrecht, schief.
68. Flächen-Scheitelwinkel
69. sind gleich.
70. Hohle, erhabene Flächenwinkel.

Wo nicht ausdrücklich anders angegeben ist, ist stets der hohle Winkel zu verstehen.

71. Messung der Flächenwinkel.

Hiezu kann der rechte Flächenwinkel dienen, eingetheilt wie der R in der Eb. G.

Man pflegt aber den Flächenwinkel auf den Winkel zweier Geraden, den Neigungswinkel, zurückzuführen.

B. Neigungswinkel

a. von zwei Ebenen.

72. Erklärung.

Fällt man von einem beliebigen Punkte einer von zwei sich schneidenden Ebenen eine Senkrechte auf die Kante und durch den Fußpunkt noch eine Senkrechte auf die Kante, aber in der andern Ebene, so bilden die beiden Senkrechten*) einen Winkel, welcher der Neigungswinkel der beiden Ebenen genannt wird. (III. 5).

73. Zusatz.

Der Neigungswinkel zweier Ebenen ergibt sich also auch, wenn man durch einen Punkt der Kante eine Ebene senkrecht auf dieselbe legt, oder wie 49. Ende.

74. Zusatz.

Es ist einerlei, welcher Punkt der Kante Scheitel des Neigungswinkels ist [36].

---

*) nämlich senkrecht auf der Kante, aber darum noch nicht senkrecht auf einander.

75. Lehrsatz.

Zu gleichen Flächenwinkeln gehören gleiche Neigungswinkel.

Beweis. Man denke sich die beiden gleichen Flächenwinkel in die Lage gebracht, daß sie sich decken, so ist jeder Neigungswinkel des einen Flächenwinkels zugleich auch Neigungswinkel des andern.

76. Lehrsatz.

Zum größern Flächenwinkel gehört der größere Neigungswinkel.

Beweis. Werden die beiden Flächenwinkel so gelegt, daß sie (III. 6) den Scheitel AB und Schenkel AOB gemein haben und die Schenkel AMB und ANB auf derselben Seite von AOB liegen, so muß der Schenkel ANB des kleinern Flächenwinkels NABO zwischen die Schenkel des größern zu liegen kommen.

Legt man nun durch den beliebigen Punkt C von AB eine Ebene senkrecht auf AB, so stehen die Kanten CD, CD′ und CD″ $\perp$ AB, und es ist $\wedge$ D′CD″ $<$ $\wedge$ DCD″, als Theil desselben.

77. Zusatz.

1) Zu gleichen Neigungswinkeln gehören gleiche Flächenwinkel.

2) Zum größern Neigungswinkel gehört der größere Flächenwinkel.

Beweis, indirect.

78. Lehrsatz.

Ist der Flächenwinkel R, so ist auch der Neigungswinkel R.

Beweis. Der Neigungswinkel muß seinen Nebenwinkel gleich [75], daher ein R sein.

79. Lehrsatz.

Steht eine Ebene schief auf einer andern, so gehört zum stumpfen Flächenwinkel ein stumpfer, zum spitzen Flächenwinkel ein spitzer Neigungswinkel.

Beweis. Der Nebenwinkel des einen Neigungswinkels ist der andere Neigungswinkel und zum größern Flächenwinkel gehört der größere Neigungswinkel.

80. Lehrsatz.

1) Ist der Neigungswinkel zweier Ebenen ein R, so steht die eine Ebene auf der andern senkrecht.

Beweis. Der Nebenwinkel des Neigungswinkels ist auch R, u. s. w.

2) Ist der Neigungswinkel zweier Ebenen ein schiefer, so steht die eine Ebene auf der andern schief und zum spitzen Neigungswinkel gehört der spitze Flächenwinkel.

Beweis, indirect.

81. Lehrsatz.

Steht eine Ebene auf einer andern senkrecht, so steht jede Gerade, welche von einem beliebigen Punkt der einen Ebene senkrecht auf die Kante gefällt wird, auch senkrecht auf der andern Ebene.

Beweis. Steht (III. 7) Ebene OPQ $\perp$ Ebene MN und ist durch Punkt C der Eb. OPQ CA $\perp$ QP gefällt, so muß CA $\perp$ Eb. MN stehen, was mittels des Neigungswinkels bewiesen wird.

Macht man nämlich in Eb. MN BA $\perp$ QP, so ist $\wedge$ CAB der Neigungswinkel, also in Folge der Voraussetzung R.

Somit steht CA $\perp$ QP und $\perp$ AB, daher $\perp$ Eb. MN.

82. Lehrsatz.

Steht eine Ebene auf einer andern senkrecht und fällt man von einem beliebigen Punkte der einen Ebene eine Senkrechte auf die andere, so liegt die Senkrechte ganz in der erstern Ebene.

Beweis. Steht (III. 8) Eb. PQ $\perp$ Eb. MN und ist vom Punkte B der Ebene PQ BA $\perp$ Eb. MN gefällt, so muß BA in Ebene PQ liegen.

Wäre dieß nämlich nicht der Fall, so müßte eine von B auf die Kante gefällte Senkrechte BA′ auch auf Ebene MN senkrecht stehen, was unmöglich ist.

83. Zusatz.

Fällt man also von beliebig vielen Punkten einer Ebene, die auf einer zweiten senkrecht steht, Senkrechte auf die zweite Ebene, so liegen die Fußpunkte alle in einer Geraden, nämlich in der Kante beider Ebenen.

84. Lehrsatz.

Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht und legt man durch die Senkrechte eine beliebige Ebene, so steht letztere auch senkrecht auf der gegebenen Ebene.

Beweis. Der Neigungswinkel ist R.

85. Zusatz.

Durch jeden Punkt einer Ebene, sowie durch jeden Punkt außerhalb einer Ebene gibt es auf dieselbe beliebig viele senkrechte Ebenen.

86. Lehrsatz.

Durch jede Gerade, welche zu einer Ebene parallel ist oder auf derselben schief steht, läßt sich 1) eine Ebene senkrecht auf die gegebene legen, aber 2) nur eine.

Beweis. Von jedem Punkt der Geraden läßt sich eine Senkrechte auf die Ebene fällen, und durch die gegebene Gerade und die Senkrechte eine Ebene legen, die dann senkrecht auf der gegebenen Ebene steht.

Gesetzt aber, es gäbe noch eine zweite solche senkrechte Ebene, so könnte man von einem beliebigen Punkte der gegebenen Geraden auf die zwei Kanten je eine Senkrechte fällen, welche dann auch beide auf der gegebenen Ebene senkrecht stehen müßten, was unmöglich ist.

87. Lehrsatz.

Stehen zwei sich schneidende Ebenen senkrecht auf einer dritten Ebene, so steht auch die Kante senkrecht auf der dritten Ebene.

Beweis. Es sei (III. 9) Ebene PQ und Eb. RS $\perp$ Eb. MN, so muß auch Kante PS $\perp$ Eb. MN stehen.

Es kann nämlich die Kante PS 1) weder in der Ebene MN liegen, weil sonst die drei Ebenen eine gemeinsame Kante hätten, und dann nicht zugleich PQ und RS $\perp$ MN sein könnten; noch 2) parallel sein zu Ebene MN; noch 3) auf derselben schief stehen [beides 86]; also ist PS $\perp$ Eb. MN.

88. Lehrsatz.

Fällt man von einem beliebigen Punkte zwischen zwei sich schneidenden Ebenen Senkrechte auf dieselben, so

beträgt der Winkel der beiden Senkrechten mit dem Neigungswinkel der beiden Ebenen zusammen π (oder 2 R oder 180°).

Beweis. Es seien (III. 10) von dem Punkte C zwischen den Ebenen AMB und ANB auf dieselben die Senkrechten CD und CD′ gefällt, so steht eine durch CD und CD′ gelegte Ebene senkrecht auf Ebene AMB und ANB [84], oder diese beiden Ebenen senkrecht auf Ebene D,C,D′, daher auch Kante AB $\perp$ Eb. D,C,D′ [87].

Heißt also der Fußpunkt der Senkrechten AB E, so ist $\wedge$ DED′ der Neigungswinkel.

Das Viereck DED′C hat die R D und D′, also ist

$$\wedge DCD + \wedge DED' = \pi \text{ oder}$$
$$\wedge DCD' + \wedge AB = \pi.$$

89. Lehrsatz.

Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten, so sind die (gleichliegenden) Neigungswinkel gleich.

Beweis. Die parallelen Ebenen (III. 11) AMB und amb werden von Ebene Nn geschnitten und es sei durch den beliebigen Punkt D der Kante AB eine Ebene $\perp$ AB gelegt, so ist wenn Ebene AMB in CD, und Ebene Mn in DE geschnitten wird, CDE $= \wedge$ AB.

Erweitert man nun Ebene CDE genugsam, so muß sie auch die Kante ab schneiden [16], und auf ihr senkrecht stehen [46], also ist $\wedge$ cde $= \wedge$ ab.

Da nun Ebene AMB || Eb. amb, so ist CD || cd, also $\wedge$ CDE $= \wedge$ cde, oder $\wedge$ AB $= \wedge$ ab.

90. Lehrsatz.

Werden zwei Ebenen von einer dritten in parallelen Geraden und unter gleichen Neigungswinkeln geschnitten, so sind die durchschnittenen Ebenen parallel.

Beweis. Ist (III. 11) AB || ab und $\wedge$ AB $= \wedge$ ab, so muß Eb. AMB || Eb. amb sein.

Es sei wie in 89 $\wedge$ CDE $= \wedge$ AB hergestellt, so muß Eb. CDE genugsam erweitert ab und daher auch Eb. amb schneiden, wobei Eb. CDE $\perp$ ab steht, also $\wedge$ cde $= \wedge$ ab ist.

Da nun $\wedge$ AB = $\wedge$ ab ist, also auch $\wedge$ CDE = $\wedge$ cde, so ist CD || cd, folglich [26] Eb. AMB || Eb. amb.

b. Projection (Riß) und Neigungswinkel der auf einer Ebene schief stehenden Geraden.

91. Erklärung.

Fällt man von allen Punkten einer Geraden, welche auf einer Ebene schief steht, Senkrechte auf die Ebene, so heißt die Gerade, in welcher die Fußpunkte liegen, die Projection oder der Riß*) der schiefen Geraden auf die Ebene.

92. Erklärung.

Der Winkel, welchen eine schiefe Gerade mit ihrem Riß bildet, heißt der Neigungswinkel der schiefen Geraden mit der Ebene.

93. Lehrsatz.

Der Neigungswinkel der schiefen Geraden mit der Ebene ist der kleinste von allen Winkeln, welche die Schiefe mit solchen Geraden bildet, die in der Ebene liegen und durch den Fußpunkt gehen.

Beweis. Fällt man (III. 12) von einem beliebigen Punkte B der schiefen Geraden die BC $\perp$ auf den Riß, und zieht in der Ebene MN durch den Fußpunkt A der schiefen Geraden AD beliebig, so muß $\wedge$ BAC $<$ $\wedge$ BAD sein.

Nimmt man nämlich auf AD AC' = AC und zieht noch BC', so ist [Eb. G. 89] $\wedge$ BAC $<$ $\wedge$ BAC' oder $\wedge$ BAC $<$ $\wedge$ BAD.

Anhang.

Von geometrischen Örtern.

94. Lehrsatz.

Der geometrische Ort derjenigen Punkte, welche von den Endpunkten einer Geraden gleichen Abstand

---

*) nach Bauernfeind.

haben, ist die Ebene, welche auf der Geraden und zwar im Halbirungspunkte senkrecht steht.

Beweis, einfach.

95. Zusatz.

Umgekehrte Sätze.

96. Lehrsatz.

Der geometrische Ort derjenigen Punkte, welche von zwei sich schneidenden Ebenen gleichen Abstand haben, ist die Halbirungs-Ebene des Flächenwinkels.

Beweis. Es sei (IV. 10) der Winkel MABN durch Ebene AOB halbirt, und von dem beliebigen Punkte D″ der Halbirungs-Ebene D″C ⊥ AB gefällt, und in Eb. AMB DC ⊥ AB, sowie in Eb. ANB D′C ⊥ AB hergestellt, so liegen diese drei Senkrechten in einer Ebene [41], und bilden bezüglich die Neigungswinkel, wobei ∧ DCD″ = ∧ D′CD″ sein muß [75].

Fällt man nun von D″ Senkrechte auf CD und CD′ so sind die Senkrechten gleich (II), und zugleich die Abstände des gewählten Punktes von den Ebenen AMB und ANB [47].

Auf dieselbe Art kann bewiesen werden, daß jeder andere Punkt der Halbirungs-Ebene von den Ebenen AMB und ANB gleichen Abstand hat.

97. Lehrsatz.

Der geometrische Ort derjenigen Punkte, welche von allen Punkten eines Kreis-Umfanges gleichen Abstand haben, ist die Gerade, welche auf der Ebene des Kreises und zwar in seinem Mittelpunkt senkrecht steht.

Beweis, einfach.

Dritter Abschnitt.

Vom Körpereck überhaupt und vom Dreikant insbesondere.

98. Erklärung.

Haben die Kanten von drei, vier, ... n sich schneidenden Ebenen nur einen Punkt gemein, so heißt der durch diese Ebenen theilweise begrenzte Raum ein drei, vier, ... n seitiges Körpereck, oder Drei-, Vier-, ... n Kant.

Der Punkt, welchen die sämmtlichen Kanten gemein haben, heißt Scheitel oder Spitze, die Winkel der Kanten heißen die Seiten, die Winkel der Ebenen die Winkel des Körperecks.

99. Lehrsatz.

In jedem Dreikant sind zwei Seiten zusammen genommen größer als die dritte.

Beweis. Ein Beweis ist offenbar nur nothwendig für den Fall, daß die dritte Seite größer ist als jede der beiden andern.

Es sei nun (IV. 1) im Dreikant BCDA $\wedge$ BAD $>$ $\wedge$ BAC und $>$ $\wedge$ CAD, so kann von dem größeren $\wedge$ BAD ein Theil $\wedge$ BAC' $=$ $\wedge$ BAC abgeschnitten werden, und wenn man einen beliebigen Punkt F der Kante AB mit einem beliebigen, G, der Kante AD durch eine Gerade verbindet, so wird AC' von FG geschnitten und der Schnittpunkt heiße E'.

Nimmt man noch auf AC AE $=$ AE' und stellt $\triangle$ EFG her, so ist*)

$$FE + EG > FG \text{ oder}$$
$$FE + EG > FE' + E'G.$$

Es ist aber wegen $\triangle$ FAE $\cong$ $\triangle$ FAE' FE $=$ FE', also bleibt

---

*) Gewöhnlich wird zum Beweise eines Satzes, der genau einem Satze der Eb. G. entspricht, letzterer in Anwendung gebracht.

EG $>$ E'G, also [Eb. G. 90] ist
$\wedge$ EAG $>$ $\wedge$ E'AG, oder
$\wedge$ CAD $>$ $\wedge$ C'AD. Hiezu oben
$\wedge$ BAC $=$ $\wedge$ BAC', also
$\wedge$ BAC $+$ $\wedge$ CAD $>$ $\wedge$ BAC' $+$ $\wedge$ C'AD, oder
$>$ $\wedge$ BAD.

100. Lehrsatz.

In jedem Dreikant, sowie in jedem Körpereck ist die Summe aller Seiten kleiner als 2π.

Beweis. Es seien (IV. 2) die Seiten des Dreikantes BCDA mit α_1, α_2, α_3 bezeichnet, und Dreikant BCDA durch eine Ebene im $\triangle$ bcd geschnitten, sodann die Winkel an den entstandenen Kanten mit β_1, β_2, ... β_6 bezeichnet, so ist

$$\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 = \pi,$$
$$\alpha_2 + \beta_3 + \beta_4 = \pi,$$
$$\alpha_3 + \beta_5 + \beta_6 = \pi, \text{ also}$$

1) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_6 = 3\pi.$

Nun ist aber [99]

$$\beta_1 + \beta_6 > \wedge \text{ cbd},$$
$$\beta_2 + \beta_3 > \wedge \text{ bcd},$$
$$\beta_4 + \beta_5 > \wedge \text{ bdc, also}$$

2) $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_6 > \pi$ [Eb. G. 69].

Subtrahirt man nun 2) von 1), so bleibt

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 2\pi.$$

Der Satz gilt für jedes Körpereck. Für den Beweis kann man durch A eine Ebene gelegt denken, welche, beliebig erweitert, mit dem Körpereck nur den Punkt A gemein hat, dann schneidet eine Ebene, durch einen beliebigen Punkt einer Kante parallel zur vorigen gelegt, alle Kanten und die Durchschnittsfigur ist, statt $\triangle$ bcd, ein n Eck. Der Gang des Beweises ist derselbe wie beim Dreikant.

101. Erklärung.

Fällt man von einem beliebigen Punkte innerhalb eines Dreikantes Senkrechte auf die Seiten desselben und legt durch je zwei dieser Senkrechten eine Ebene, so entsteht ein neues Dreikant, welches Ergänzungs-Dreikant genannt wird.

102. Lehrsatz.

Die Seiten des Ergänzungs-Dreikantes ergänzen die ihnen gegenüberliegenden Winkel des ursprünglichen Dreikantes, und die Winkel des Ergänzungs-Dreikantes die ihnen gegenüberliegenden Seiten des ursprünglichen Dreikantes zu π.

Beweis. Es sei (IV. 3) EF $\perp$ Eb. BAC, EG $\perp$ Eb. BAD und EH $\perp$ Eb. CAD gefällt, so ist
z. B. $\wedge$ GEF + $\wedge$ AB = π [88].

Ferner ist Eb. GEF $\perp$ AB [87], ebenso Eb. FEH $\perp$ AC, daher [88] $\wedge$ EF + $\wedge$ BAC = π.

Ebenso kann der Beweis für die zwei andern Paare geführt werden.

103. Lehrsatz.

In jedem Dreikant ist die Summe aller Winkel $> \pi$ und $< 3\pi$.

Beweis. Denkt man sich das Ergänzungs-Dreikant hergestellt, so betragen die Winkel des ursprünglichen Dreikantes mit den ihnen gegenüberliegenden Seiten des Ergänzungs-Dreikantes zusammen 3π.

Es ist aber [100] die Summe aller Seiten $< 2\pi$ und selbstverständlich größer als 0, daher, wenn von 3π subtrahirt wird, die Summe der Winkel im ursprünglichen Dreikant $> \pi$ und $< 3\pi$.

104. Lehrsatz.

Liegt von zwei Dreikanten, welche eine Seite gemeinsam haben, das eine so, daß eine Seite von einer und eine Seite vom andern, ohne erweitert zu werden, sich schneiden, so ist die Summe aus diesen zwei sich schneidenden Seiten größer als die Summe aus den andern nicht gemeinsamen Seiten.

Beweis. Aehnlich wie Eb. G. 67.

105. Lehrsatz.

Liegt von zwei Dreikanten, welche eine Seite gemeinsam haben, das eine innerhalb des andern, so

ist die Summe der einschließenden Seiten größer als die Summe der eingeschloßenen Seiten.

Beweis. Aehnlich wie Eb. G. 68.

106. Lehrsatz.

In jedem Dreikant liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber.

Beweis. Ist (IV. 4) $\wedge$ BAC = $\wedge$ B'AC und von einem beliebigen Punkte D der Kante AC DE $\perp$ Eb. BAB', ferner EF $\perp$ AB und EF' $\perp$ AB' gefällt, auch DF und DF' gezogen, so ist

$\triangle$ FAD $\cong$ $\triangle$ F'AD (II), also FD = F'D, und

$\triangle$ FDE $\cong$ $\triangle$ F'DE (IV), daher $\wedge$ DFE = DF'E, oder

$\wedge$ AB = $\wedge$ AB' [49 u. 73].

107. Zusatz.

Sind in einem Dreikant alle Seiten gleich, so sind auch alle Winkel gleich.

108. Zusatz.

Sind in einem Dreikant zwei Seiten gleich, so liegen ihnen spitze Winkel gegenüber.

109. Lehrsatz.

In jedem Dreikant liegen gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Beweis. Aehnlich wie 106.

110. Zusatz.

Sind in einem Dreikant alle Winkel gleich, so sind auch alle Seiten gleich.

111. Lehrsatz.

In jedem Dreikant liegt dem größern Winkel die größere Seite gegenüber.

Beweis. Ist (IV. 5) in dem Dreikant BCDA $\wedge$ AC > $\wedge$ AB, so kann man von $\wedge$ AC einen Winkel = $\wedge$ AB abgeschnitten denken, was gegen AB hin durch eine Ebene geschehe, deren Kante mit Eb. BAD AC' heiße.

Nun ist 1) im Dreikant BCC'A

1) $\wedge$ CAC' = $\wedge$ BAC' [106], ferner

im Dreikant CC'DA

2) $\wedge$ CAC' + $\wedge$ C'AD > $\wedge$ CAD, [99], also auch
$\wedge$ BAC' + C'AD > $\wedge$ CAD, oder
$\wedge$ BAD > $\wedge$ CAD.

112. Lehrsatz.

In jedem Dreikant liegt der größern Seite der größere Winkel gegenüber.

Beweis, indirect.

113. Erklärung.

Erweitert man (IV. 6) die Seiten eines Dreikantes über den Scheitel hinaus, so entsteht ein neues Dreikant, welches Scheitel-Dreikant genannt wird.

114. Zusatz.

Dreikant und Scheitel-Dreikant haben alle Seiten und Winkel bezüglich gleich.

115. Lehrsatz.

Hat ein Dreikant gleiche Winkel, so ist es seinem Scheitel-Dreikant congruent.

Beweis. Es sei (IV. 6) für das Dreikant BCDA mit $\wedge$ AB = $\wedge$ AD das Scheitel-Dreikant B'C'D'A hergestellt und mit BCDA so zusammen (oder in einander) gelegt, daß
1) Punkt A gemeinsam bleibt,*)
2) AB' auf AD, und
3) Eb. B'AD' mit Eb. DAB zusammenfällt,
so muß auch
1) AD' mit AB zusammenfallen, wegen $\wedge$ B'AD' = $\wedge$ BAD, ferner
2) Eb. C'AB' mit Eb. CAD wegen $\wedge$ AD = $\wedge$ AB = $\wedge$ AB', ebenso
3) Eb. C'AD' mit Eb. BAC, daher muß auch
4) AC' mit AC zusammenfallen.

Somit decken sich Dreikant und Scheitel-Dreikant vollständig, sind also congruent nach dem Begriff.

---

*) Um rasch die richtige Vorstellung zu gewinnen, mag sich der Schüler AB und AD [somit auch AB' und AD'] in der Ebene der Tafel denken, AC aber auf der ihm zugewendeten Seite derselben, dann liegt AC' hinter derselben und wird B'C'D'A gleichsam ein- und herübergeschlagen.

116. Lehrsatz.

Hat ein Dreikant lauter ungleiche Winkel, so kann es seinem Scheitel-Dreikant nicht congruent sein.

Beweis. Man kann zwar die beiden Dreikante so zusammenlegen, daß eine Seite des einen eine Seite des andern deckt, aber die Flächenwinkel, welche dann gemeinsamen Scheitel haben, sind ungleich, können sich also nicht decken, daher decken sich auch die Dreikante nicht.

117. Erklärung.

Zwei Dreikante, welche in allen Seiten und Winkeln übereinstimmen, aber nicht congruent sind, heißen symmetrisch.

Das Zeichen für symmetrisch ist |?|.

118. Zusatz.

Ein Dreikant mit lauter ungleichen Seiten ist seinem Scheitel-Dreikant symmetrisch.

Congruenz- und Symmetrie-Fälle der Dreikante.

119. Lehrsatz.

I.

Stimmen zwei Dreikante in zwei Seiten überein und in den von diesen Seiten eingeschloßenen Winkeln, so sind sie 1) congruent, wenn die als gleich gegebenen Stücke in beiden Dreikanten dieselbe Lage haben, 2) im andern Falle symmetrisch.

Beweis. Zu 1). Aus dem Begriff. (IV. 7).

Zu 2). Es sei $\wedge$ BAC $=$ $\wedge$ cad, $\wedge$ CAD $=$ $\wedge$ bac, $\wedge$ AC $=$ $\wedge$ ac, und zu einem der beiden Dreikante das Scheitel-Dreikant hergestellt z. B. B′C′D′A, so ist $\wedge$ AC′ $=$ $\wedge$ AC $=$ $\wedge$ ac, $\wedge$ C′AD′ $=$ $\wedge$ CAD $=$ $\wedge$ bac und $\wedge$ B′AC′ $=$ $\wedge$ BAC $=$ $\wedge$ cad, also nach dem bereits erwiesenen Falle B′C′D′A $\cong$ bcda, also BCDA |?| bcda.

120. Zusatz.

In congruenten, ebenso in symmetrischen Dreikanten liegen gleichen Seiten gleiche Winkel und gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

121. Zusatz.

Sind zwei Dreikante dem nämlichen dritten symmetrisch, so sind sie unter sich congruent.

122. Lehrsatz.

Stimmen zwei Dreikante in zwei Seiten (gleicher Lage) überein, in den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkeln aber nicht, so liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber.

Beweis. Aehnlich wie Eb. G. 89.

123. Lehrsatz.

Stimmen zwei Dreikante in zwei Seiten (gleicher Lage) überein, in der dritten Seite aber nicht, so liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.

Beweis, indirect.

124. Lehrsatz.

II.

Stimmen zwei Dreikante in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln überein, so sind sie 1) congruent u. s. w. (wie 119).

Beweis, wie 119.

125. Zusatz.

Sind in einem Dreikant zwei Seiten gleich, so steht die Halbirungs-Ebene ihres Winkels senkrecht auf der dritten Seite und halbirt dieselbe. [124 oder 119].

126. Lehrsatz.

III.

Stimmen zwei Dreikante in den Seiten überein, so sind sie 1) congruent u. s. w.

Beweis. Zu 1) indirect; zu 2) wie 119.

127. Zusatz.

Hat ein Dreikant zwei gleiche Seiten und legt man durch ihre Kante und die Halbirungslinie der dritten Seite eine Ebene,

so steht diese senkrecht auf der dritten Seite und halbirt den Winkel der zwei gleichen Seiten.

128. Zusatz.

Hat ein Dreikant zwei gleiche Seiten und legt man durch die Halbirungs-Linie der dritten Seite eine Ebene senkrecht auf diese Seite, so muß in dieser Ebene die Kante der beiden gleichen Seiten liegen.

129. Erklärung.

Denkt man sich in einem Dreikant eine Seite über eine ihrer Kanten hinaus erweitert, so bildet die Erweiterung mit der anstoßenden Seite einen Winkel, welcher Außenwinkel heißt.

130. Lehrsatz.

Der Außenwinkel ist größer als jeder im Dreikant ihm gegenüberliegende Winkel.

Beweis. Es sei (IV. 8) Eb. BAD über Kante AD hinaus erweitert und so der Außenwinkel hergestellt, nämlich der Winkel der Ebenen CAD und ADF, so muß dieser Winkel größer sein als $\wedge$ AC und größer als $\wedge$ AB.

Denkt man sich nun $\wedge$ CAD durch AE halbirt, dann in Eb. BAE $\wedge$ EAB' $=$ $\wedge$ EAB genommen, und Eb. DAB' gelegt, so stimmen die Dreikante BCEA und B'DEA in zwei Seiten und in dem von diesen Seiten eingeschloßenen Winkel überein, also muß der Winkel von Eb. EAD und DAB' gleich sein dem $\wedge$ AC.

Da nun der erstere Winkel nur ein Theil des Außenwinkels ist, so ist der Außenwinkel größer als $\wedge$ AC.

Auf gleiche Art läßt sich darthun, daß der Scheitelwinkel des Außenwinkels größer ist als $\wedge$ AB, also ist auch der Außenwinkel größer als $\wedge$ AB des gegebenen Dreikantes.

131. Lehrsatz.

IV.

Stimmen zwei Dreikante in zwei Seiten überein und in dem der größern von diesen zwei Seiten gegenüberliegenden Winkel, so sind sie 1) congruent u. s. w.

Beweis. Zu 1). Ist (IV. 9) in den Dreikanten BCDA und bcda $\wedge$ BAC $=$ $\wedge$ bac, $\wedge$ CAD $=$ $\wedge$ cad, $\wedge$ CAD $>$

$\wedge$ BAC (oder $\wedge$ cad $>$ $\wedge$ bac), und $\wedge$ AB $=$ $\wedge$ ab, so suchen wir zu zeigen, daß $\wedge$ BAD $=$ $\wedge$ bad sein muß.

Wäre $\wedge$ BAD $>$ $\wedge$ bad, so könnte man davon einen Theil $\wedge$ BAd' $=$ $\wedge$ bad abschneiden, und es wäre, wenn man Eb. C,A,d' legt, BCd'A $\cong$ bcda (I), also $\wedge$ CAd' $=$ $\wedge$ cad, daher auch $\wedge$ CAd' $=$ $\wedge$ CAD.

Es wären nun in dem Dreikant CDd'A zwei Seiten gleich, daher auch die Winkel, welche diesen gleichen Seiten gegenüberliegen, nemlich $\wedge$ AD und der Winkel von Eb. DAd' und Eb. CAd' welch letzterer [130] $>$ AB wäre, also müßte auch $\wedge$ AD $>$ $\wedge$ AB sein, was unmöglich ist [112].

Also kann $\wedge$ BAD nicht $>$ $\wedge$ bad und wie sich ebenso zeigen läßt, $\wedge$ bad nicht $>$ $\wedge$ BAD oder BAD nicht $<$ $\wedge$ bad sein, somit ist $\wedge$ BAD $=$ $\wedge$ bad, daher BCDA $\cong$ bcda (I oder III).

Zu 2). Wie 119.

132. Zusatz.

Hat ein Dreikant zwei gleiche Seiten und legt man durch ihre Kante eine Ebene senkrecht auf die dritte Seite, so wird dadurch diese Seite und der Winkel der beiden gleichen Seiten halbirt.

133. Lehrsatz.

V.

S t i m m e n z w e i D r e i k a n t e i n z w e i W i n k e l n ü b e r e i n u n d i n d e r d e m g r ö ß e r n v o n d i e s e n z w e i W i n k e l n g e g e n ü b e r l i e g e n d e n S e i t e, s o s i n d s i e 1) c o n g r u e n t u. s. w.

B e w e i s, zu 1). Ist (IV. 9) in den Dreikanten BCDA und bcda

$\wedge$ AB $=$ $\wedge$ ab, $\wedge$ AD $=$ $\wedge$ ad, $\wedge$ AB $>$ $\wedge$ AD (oder $\wedge$ ab $>$ $\wedge$ ad), und $\wedge$ CAD $=$ $\wedge$ cad, so suchen wir zu zeigen, daß $\wedge$ BAD $=$ $\wedge$ bad sein muß.

Wäre $\wedge$ BAD $>$ $\wedge$ bad, so könnte man davon einen Theil $\wedge$ d'AD $=$ $\wedge$ bad abschneiden und es wäre, wenn man Eb. CAd' legt, der Winkel der Ebene DAd' mit Eb. CAd' $=$ $\wedge$ ab, daher ersterer auch $=$ $\wedge$ AB, was unmöglich ist [130].

Sonach kann $\wedge$ BAD nicht $>$ $\wedge$ bad und ebenso $\wedge$ bad nicht $>$ $\wedge$ BAD oder $\wedge$ BAD nicht $<$ $\wedge$ bad sein, also ist $\wedge$ BAD $=$ $\wedge$ bad und BCDA $\cong$ bcda (I).

Zu 2). Wie 119.

Oder: Beweis für beide Fälle, ähnlich wie 134, mit Hilfe der Ergänzungs-Dreikante.

134. Lehrsatz.

VI.

Stimmen zwei Dreikante in den Winkeln überein, so sind sie 1) congruent u. s. w.

Beweis. Da die Winkel der beiden Dreikante bezüglich gleich sind, so sind auch ihre Ergänzungen bezüglich gleich, nämlich die den gleichen Winkeln der gegebenen Dreikante gegenüberliegenden Seiten der Ergänzungs-Dreikante.

Wenn aber die Ergänzungs-Dreikante in den Seiten übereinstimmen, so stimmen sie auch in den Winkeln überein.

Da die Winkel in den Ergänzungs-Dreikanten bezüglich gleich sind, sind es auch ihre Ergänzungen, nämlich die ihnen gegenüberliegenden Seiten der gegebenen Dreikante.

Sonach müßen die gegebenen Dreikante in den Seiten übereinstimmen, sind also congruent oder symmetrisch (111).

Vierter Abschnitt.

Von den Körpern.

A. Körper überhaupt und regelmäßige Körper insbesondere.

135. Erklärungen.

Unter Körper versteht man einen allseitig begrenzten Raum.

Ist der Körper von lauter Ebenen begrenzt, so wird er ein ebener Körper oder Polyeder genannt; ist kein Theil der Grenze eben, — krummflächig; ist die Grenze nur theilweise eben, — gemischtflächig.

136. Erklärung.

Ein ebener Körper heißt regelmäßig, wenn die sämmtlichen Grenzflächen regelmäßige und congruente geradlinige Figuren sind, von denen immer gleich viele zu einem Körperecke sich vereinigen.

137. Lehrsatz.

Es kann keinen regelmäßigen Körper geben, in welchem
1) mehr als fünf regelmäßige und congruente Dreiecke,
2) mehr als drei congruente Quadrate,
3) mehr als drei regelmäßige und congruente Fünfecke,
4) drei oder mehr regelmäßige und congruente Vielecke von mehr als fünf Seiten sich zu einem Körperecke vereinigen.

Beweis. Die Summe der Seiten wäre, wie leicht zu finden, entweder gleich oder größer als 2π, was unmöglich ist.

138. Erklärungen.

Ist ein Körper begrenzt
1) von 4 reg. und cong. Dreiecken, mit je 3 davon an jedem Körpereck, so heißt er Tetraeder.
2) von 8 reg. und cong. Dreiecken, mit je 4 davon an jedem Körpereck, so heißt er Oktaeder.
3) von 20 reg. und cong. Dreiecken, mit je 5 davon an jedem Körpereck, so heißt er Ikosaeder.
4) von 4 reg. und cong. Vierecken, mit je 3 davon an jedem Körpereck, so heißt er Hexaeder, Kubus oder Würfel.
5) von 12 reg. und cong. Fünfecken, mit je 3 davon an jedem Körpereck, so heißt er Dodekaeder.

B. Prisma und Pyramide.

Außer den regelmäßigen Körpern werden gewöhnlich nur zwei ebene Körper betrachtet, nämlich Prisma und Pyramide.

a. Prisma.

139. Erklärungen.

Prisma ist ein Körper, begrenzt von lauter ebenen geradlinigen Figuren, wovon zwei in parallelen Ebenen liegen und congruent, die übrigen aber Parallelogramme sind, und zwar so viele, als jede der beiden ersten Figuren Seiten hat. (V. 1).

Die zwei congruenten und parallelen Grenzflächen heißen Grundflächen, die andern heißen Seitenflächen.

Die Kanten der Grundflächen heißen Grundkanten, die andern heißen Seitenkanten.

Eine Senkrechte von einem beliebigen Punkte der einen Grundfläche auf die andere gefällt, heißt Höhe des Prisma.

Steht eine Seitenkante (also alle) senkrecht oder schief auf der Grundfläche, so heißt das Prisma selbst senkrecht oder schief.

Man kann sich ein Prisma z. B. dadurch entstanden denken, daß man von den Ecken einer geradlinigen Figur parallele und unter sich gleiche Gerade zieht, und durch je zwei unmittelbar auf einander folgende von diesen Geraden; sowie durch die Endpunkte aller eine Ebene legt.

Ist die Grundfläche des Prisma ein n Eck, so heißt das Prisma n seitig.

140. Lehrsatz.

Wird ein Prisma durch eine Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten, so ist die Durchschnitts-Figur der Grundfläche congruent.

Beweis. 25, 36, Eb. G.

141. Lehrsatz.

Zwei Prismen sind congruent, wenn ein Körpereck im einen congruent ist einem Körpereck im andern Prisma, und wenn diese Körperecken von lauter bezüglich congruenten Grenzflächen gebildet sind.

Beweis. Durch Deckung.

Parallelepipedon.

142. Erklärung.

Ein Prisma wird Parallelepipedon genannt, wenn die Grundfläche ein Parallelogramm ist. (V. 2).

Das Parallelepipedon ist also von sechs Parallelogrammen begrenzt, und wenn diese alle rechtwinklig sind, heißt es auch rechtwinklig.

143. Lehrsatz.

Im Parallelepipedon sind die gegenüberstehenden Seitenflächen parallel und congruent..

Beweis. 26; 36; Eb. G. 133.

Bemerkung. Ist ein Parallelepipedon von lauter congruenten Quadraten begrenzt, so ist es ein Würfel.

b. Pyramide.

144. Erklärungen.

Pyramide ist ein Körper begrenzt von Dreiecken, welche sämmtlich Einen Punkt gemeinsam haben und von einer geradlinigen Figur mit so vielen Seiten, als die Anzahl der Dreiecke beträgt. (V. 3).

Diese geradlinige Figur heißt Grundfläche, die Dreiecke Seitenflächen.

Die Kanten der Grundfläche heißen Grundkanten, die andern Seitenkanten.

Der den Seitenflächen gemeinsame Punkt heißt Spitze, und eine von der Spitze auf die Grundfläche gefällte Senkrechte heißt Höhe der Pyramide.

Man kann sich eine Pyramide dadurch entstanden denken, daß man von den Ecken einer geradlinigen Figur Gerade nach einem außerhalb der Ebene dieser Figur liegenden Punkte zieht und durch je zwei unmittelbar auf einander folgende Verbindungslinien eine Ebene legt.

Ist die Grundfläche der Pyramide ein n Eck, so heißt die Pyramide n seitig.

145. Lehrsatz.

Ist die Grundfläche der Pyramide eine regelmäßige Figur und sind alle Seitenkanten gleich, so ist der Fußpunkt der Höhe der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises.

Beweis. Fällt man nämlich (V. 3) AF senkrecht auf die Grundfläche BCDE, die ein Quadrat sein soll, und verbindet F durch Gerade mit den Ecken der Grundfläche, so ist $\triangle$ ABF $\cong$ ACF u. s. w. (IV), also BF = CF u. s. w.

Ebenso läßt sich der Beweis bei einer andern Seitenzahl der Grundfläche führen.

Bemerkung. Man nennt solche Pyramiden auch regelmäßig,

146. Lehrsatz.

Wird eine Pyramide durch eine Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten, so ist die Durchschnitts-Figur 1) der Grundfläche ähnlich und 2) es verhalten sich Durchschnitts-Figur und Grundfläche wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze.

Beweis. Es sei (V. 4) Pyramide BCDEA durch Ebene bcde || Eb. BCDE geschnitten, und sei die Durchschnitts-Figur mit g und die Grundfläche mit G bezeichnet, so soll

1) g $\sim$ G sein.

Sollen g und G ähnlich sein, so müßen sie in den Winkeln und im Verhältniß der gleichliegenden Seiten übereinstimmen.

Nun ist a) bc || BC und be || BE, also

$\wedge$ cbe $= \wedge$ CBE.

Ebenso für je zwei andere Winkel.

Ferner ist b) bc : BC = Ab : AB und

be : BE = Ab : AB, also

bc : BC = be : BE.

Ebenso für je zwei andere anstoßende Seiten.

Da nun nach a) alle Winkel bezüglich gleich sind und nach b) alle Seiten in gleichem Verhältniß stehen, so ist g $\sim$ G.

Zu 2). Nun soll das Verhältniß von g und G erwiesen werden, und da bereits bewiesen ist, daß g $\sim$ G ist, so haben wir

$g : G = \overline{bc}^2 : \overline{BC}^2$ (Eb. G.). Aber

$bc : BC = Ab : AB$, also

$\overline{bc}^2 : \overline{BC}^2 = \overline{Ab}^2 : \overline{AB}^2$, daher

$g : G = \overline{Ab}^2 : \overline{AB}^2$.

Um auf die Abstände der Durchschnitts-Figur und der Grundfläche von der Spitze zu kommen, sei Af $\perp$ Eb. g gefällt und verlängert bis zum Durchschnitt mit Eb. G, in F, so ist AF $\perp$ Eb. G.

Zieht man nun, um eine Verbindung von AB und AF, Ab und Af zu gewinnen, die Geraden bf und BF, so ist bf || BF, daher

$Ab : AB = Af : AF$ und

$\overline{Ab}^2 : \overline{AB}^2 = \overline{Af}^2 : \overline{AF}^2$; mithin

$g : G = \overline{Af}^2 : \overline{AF}^2$.

147. Lehrsatz.

Werden zwei Pyramiden von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe durch Ebenen parallel zur Grundfläche geschnitten und zwar in gleichen Abständen von der Spitze, so sind die Durchschnitts-Figuren einander gleich.

Beweis. Der Einfachheit wegen seien (V. 5) zwei dreiseitige Pyramiden gewählt und die Durchschnitts-Figuren mit g und g', die Grundflächen mit G und G', die Höhen mit AF und af, die Abstände mit AF' und af' bezeichnet, so verhält sich

$$g : G = \overline{AF'}^2 : \overline{AF}^2 \text{ und}$$
$$g' : G' = \overline{af'}^2 : \overline{af}^2.$$

In diesen zwei Proportionen sind die zweiten Glieder gleich, ebenso die dritten gleich und die vierten, daher auch $g = g'$.

148. Lehrsatz.

Zwei Pyramiden sind congruent, wenn ein Körpereck in der einen congruent ist einem Körpereck in der andern Pyramide, und wenn diese Körperecken von lauter bezüglich congruenten Grenzflächen gebildet sind.

Beweis. Durch Deckung.

149. Erklärung.

Wird eine Pyramide durch eine Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten, so heißt der Theil der Pyramide, welcher zwischen den parallelen Ebenen liegt, abgekürzte Pyramide.

Die beiden parallelen Grenzflächen heißen Grundflächen, und eine Senkrechte, von einem beliebigen Punkte der einen auf die andere gefällt, heißt die Höhe der abgekürzten Pyramide.

C. Cylinder und Kegel.

Von den gemischtflächigen Körpern kommen hier *) Cylinder und Kegel in Betracht.

---

*) Später auch gemischtflächige Theile der Kugel.

a. Cylinder.

150. Erklärungen.

Cylinder (Walze) heißt ein Körper, begrenzt von zwei congruenten Kreisen, die in parallelen Ebenen liegen, und von einer krummen Fläche von solcher Beschaffenheit, daß jeder Punkt des einen Kreis-Umfanges mit nur einem Punkte des andern durch eine Gerade so verbunden werden kann, daß diese Gerade ganz in der krummen Fläche liegt. (V. 6).

Die Kreise heißen Grundkreise, die krumme Fläche Mantel und die gerade Verbindungs-Linie Seite des Cylinders.

Eine Senkrechte, von einem beliebigen Punkte des einen Grundkreises auf die Ebene des andern gefällt, heißt Höhe.

Die Gerade, welche die Mittelpunkte der beiden Grundkreise verbindet, heißt Axe.

Steht die Axe senkrecht auf dem Grundkreise, so wird der Cylinder ein senkrechter genannt.

Wir betrachten nur senkrechte Cylinder.

151. Lehrsatz.

Jede Seite des Cylinders ist zur Axe parallel.

Beweis. Denkt man sich nämlich durch die Axe Mm (V. 6) und durch den Punkt A, welcher im Umfang des einen Grundkreises beliebig gewählt ist, eine Ebene gelegt, so muß diese Ebene auch den Umfang des andern Grundkreises schneiden, und dieß geschehe in a.

Verbindet man nun die Punkte A und a durch eine Gerade, so muß Aa eine Seite des Cylinders sein (Begriff) und in der Ebene Mm A liegen, der Punkte A und a wegen.

Da nun MA || und = ma ist, so muß Aa || Mm sein.

152. Zusatz.

1) Jede durch die Axe gelegte Ebene schneidet den Mantel in einer Geraden.

2) Wird ein Cylinder durch eine Ebene parallel zur Axe geschnitten, so ist die Durchschnitts-Figur (beim senkrechten Cylinder) ein Rechteck.

3) Jede Ebene durch die Axe gelegt, schneidet den Cylinder auch in einem Rechteck.

4) Man kann sich also den (s.) Cylinder dadurch entstanden denken, daß man ein Rechteck um eine seiner Seiten vollständig dreht.

153. Lehrsatz.

Wird ein Cylinder durch eine Ebene parallel zum Grundkreise geschnitten, so ist die Durchschnitts-Figur ein Kreis, welcher dem Grundkreis congruent ist.

Beweis. Die zum Kreise um A (V. 7) parallele Ebene schneide die Axe in a, so ist die Durchschnitts-Figur ein Kreis, wenn alle Punkte ihres Umfanges von a gleichen Abstand haben.

Es seien nun in diesem Umfange die Punkte b und c beliebig gewählt, und durch jeden von ihnen und die Axe eine Ebene gelegt, welche den Umfang des Kreises um A in B und C schneiden, so muß ba = BA sein, ebenso [Eb. G. 109, 1] ac = AC.

Da nun ba = BA = AC = ac ist, so steht b von a eben so weit ab als c, und wie auf gleiche Art erwiesen werden kann, eben so weit als jeder beliebige Punkt des Umfanges vom Punkte a absteht.

Also ist die Durchschnitts-Figur ein Kreis und Halbmesser ab = AB, daher ist dieser Kreis dem Grundkreise congruent.

154. Erklärung.

Ein Cylinder heißt gleichseitig, wenn die Seite (oder Höhe) gleich ist dem Durchmesser des Grundkreises.

b. Kegel.

155. Erklärung.

Kegel heißt ein Körper, begrenzt durch einen Kreis und eine krumme Fläche von solcher Beschaffenheit, daß ein Punkt derselben mit jedem Punkt des Kreis-Umfanges durch eine Gerade verbunden werden kann so, daß diese Gerade in der krummen Fläche liegt. (V. 8).

Der Kreis heißt Grundkreis, die krumme Fläche Mantel, die gerade Verbindungslinie Seite, der Eine Punkt Spitze des Kegels.

Eine Senkrechte, von der Spitze auf die Ebene des Grundkreises gefällt, heißt Höhe.

Die Gerade, welche die Spitze und den Mittelpunkt des Grundkreises verbindet, heißt Axe, und wenn die Axe senkrecht auf der Ebene des Grundkreises steht, so wird der Kegel ein senkrechter genannt.

Wir betrachten nur senkrechte Kegel.

156. Lehrsatz.

Jede Ebene, durch die Axe des Kegels gelegt, schneidet den Mantel in einer Geraden, Seite.

Beweis. Denkt man sich nämlich (V. 8) durch die Axe AB eine Ebene gelegt, welche den Umfang des Grundkreises in C schneidet, und denkt man sich ferner die Gerade AC gezogen, so muß AC eine Seite sein (Begriff), und in der Eb. ABC liegen, der Punkte A und C wegen.

Also schneidet Eb. ABC den Mantel in einer Geraden, Seite.

157. Zusatz.

1) Jede Ebene, durch die Axe gelegt, schneidet den (s.) Kegel in einem gleichschenkligen Dreiecke.

2) Dieses gleichschenklige Dreieck wird durch die Axe in zwei congruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt, mit der Axe und dem Halbmesser des Grundkreises als Catheten; daher kann man sich den Kegel dadurch entstanden denken, daß man ein rechtwinkliges Dreieck um eine Cathete vollständig dreht.

158. Lehrsatz.

Wird ein Kegel durch eine Ebene parallel zum Grundkreise geschnitten, so ist die Durchschnitts-Figur 1) ein Kreis und es verhalten sich 2) Durchschnitts-Figur und Grundkreis wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze.

Beweis. Es sei (V. 9) der Kegel durch eine Ebene parallel zum Grundkreise um B geschnitten, und die Axe AB werde in b von dieser parallelen Ebene geschnitten, und es heiße die Durchschnitts-Figur k, der Grundkreis K, so soll

1) k ein Kreis sein.

(Vgl. 153). Es seien im Umfang von k die Punkte c und b beliebig gewählt und durch jeden von ihnen und die Axe eine Ebene gelegt, durch welche der Umfang des Grundkreises bezüglich in C

und B geschnitten wird, so ergibt sich bc || BC und bd || BD, also

$$bc : BC = Ab : AB \text{ und}$$
$$bd : BD = Ab : AB, \text{ (Eb. G.)}.$$

In diesen zwei Proportionen sind die zweiten, die dritten und vierten Glieder gleich, also auch die ersten, und es haben demnach die Punkte c und d, und wie auf dieselbe Art bewiesen werden kann, auch jeder andere Punkt im Umfange der Durchschnitts-Figur von b gleichen Abstand, daher ist k ein Kreis.

Um das Verhältniß zu erweisen, haben wir

$$k : K = \overline{bc}^2 : \overline{BC}^2 \text{ (Eb. G.), aber}$$
$$bc : BC = Ab : AB, \text{ daher auch}$$
$$\overline{bc}^2 : \overline{BC}^2 = \overline{Ab}^2 : \overline{AB}^2, \text{ folglich}$$
$$k : K = \overline{Ab}^2 : \overline{AB}^2.$$

Bemerkung. Kegelschnitte.

159. Erklärung.

Ein Kegel heißt gleichseitig, wenn die Seite dem Durchmesser des Grundkreises gleich ist.

160. Erklärung.

Wird ein Kegel durch eine Ebene parallel zum Grundkreis geschnitten, so heißt der Theil des Kegels, welcher zwischen den parallelen Ebenen liegt, abgekürzter Kegel.

Die beiden Grenzkreise heißen Grundkreise, die krumme Fläche dazwischen Mantel, und eine Senkrechte von einem beliebigen Punkte des einen Grundkreises auf die Ebene des andern gefällt, heißt Höhe.

D. Kugel.

Von den krummflächigen Körpern kommt hier nur die Kugel in Betracht.

161. Erklärung.

Kugel ist ein Körper begrenzt von einer Fläche, deren sämmtliche Punkte von einem Punkte gleich weit abstehen.

Die Fläche heißt Oberfläche und der Punkt, von welchem alle Punkte der Oberfläche gleichen Abstand haben, Mittelpunkt der Kugel.

Eine Gerade, welche irgend einen Punkt der Oberfläche z. B. (V. 10) mit dem Mittelpunkte M verbindet, heißt Halbmesser oder Radius.

Zwei Halbmesser, in einer Geraden liegend, bilden einen Durchmesser.

Eine Kugel kann dadurch entstanden gedacht werden, daß man einen Halbkreis um den Durchmesser vollständig dreht, wobei die Halbkreis-Linie die Oberfläche der Kugel beschreibt.

162. Zusatz.

1) Alle Halbmesser derselben Kugel sind gleich, daher auch alle Durchmesser.

2) Ist der Abstand eines Punktes vom Mittelpunkt größer als der Halbmesser, so liegt der Punkt außerhalb der Kugel; ist der Abstand gleich dem Halbmesser, so liegt der Punkt in der Oberfläche, und ist der Abstand kleiner als der Halbmesser, so liegt der Punkt innerhalb der Kugel. Und umgekehrt.

3) Jede Kugel hat nur einen Mittelpunkt und dieser liegt innerhalb der Kugel.

4) Kugeln mit gleichen Halbmessern sind gleich und gleiche Kugeln sind auch congruent, also sind alle Kugeln ähnlich.

163. Erklärung.

Sehne, Secante, Tangente — entsprechend, wie beim Kreise.

Eine Ebene, welche bei beliebiger Erweiterung mit der Kugel nur einen Punkt gemein hat, heißt Berührungs-Ebene.

164. Lehrsatz.

Die Oberfläche der Kugel ist eine krumme Fläche.

Beweis. Angenommen, es wäre irgend ein Theil der Kugel-Oberfläche eben, so müßte der Mittelpunkt der Kugel von allen Punkten dieser Ebene gleich weit abstehen, was [nach 53] unmöglich ist.

165. Lehrsatz.

Wird eine Kugel durch eine Ebene geschnitten, so ist die Durchschnitts-Figur ein Kreis.

Beweis. Für den Beweis unterscheiden wir zwei Fälle, nämlich 1) ob die Ebene durch den Mittelpunkt geht oder 2) nicht.

Zu 1). Vgl. 153. Geht die Ebene (V. 10) durch den Mittel-

punkt der Kugel, so ist jede Gerade, welche den Mittelpunkt M mit einem Punkte des Umfanges der Durchschnitts-Figur verbindet, zugleich ein Kugel-Halbmesser, also stehen alle Punkte dieses Umfanges von M gleichweit ab und es ist daher die Durchschnitts-Figur ein Kreis.

Zu 2). Geht die Ebene nicht durch den Mittelpunkt M, so sei (V. 11) MA senkrecht auf die Ebene gefällt und wenn man sich die sämmtlichen Punkte des Umfanges der Durchschnitts-Figur, wie B und B' durch Gerade mit A und M verbunden denkt, so sind die Dreiecke AMB, AMB' u. s. w. congruent (IV.), also sind die Geraden AB, AB' u. s. w., d. h. die Abstände aller Punkte des Umfanges der Durchschnitts-Figur vom Punkte A gleich, daher ist diese Figur ein Kreis.

166. Erklärung.

Jeder Kreis, in welchem eine Kugel von einer Ebene geschnitten wird, heißt **Kugelkreis**.

167. Lehrsatz.

Von allen Kugelkreisen ist jener der größte, dessen Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel geht.

Beweis. Geht die Ebene durch den Mittelpunkt (V. 10), so ist der Kreis-Halbmesser gleich dem Kugel-Halbmesser; geht aber die Ebene nicht durch den Mittelpunkt, so ist der Kreis-Halbmesser (V. 11) Cathete, während der Kugel-Halbmesser Hypotenuse im selben Dreieck ist.

168. Erklärung.

Jeder Kugelkreis, deßen Ebene durch den Kugel-Mittelpunkt geht, heißt ein **größter Kreis**.

169. Lehrsatz.

Größte Kreise (derselben Kugel) **halbiren sich.**

Beweis. Die beiden größten Kreise (V. 12) BAC und BA'C müßen durch den Mittelpunkt M gehen, daher sich schneiden und da die Kante durch den Mittelpunkt geht, müßen sich die Kreise in einem Kugel-Durchmesser schneiden.

Dieser Kugel-Durchmesser ist aber zugleich ein Durchmesser für jeden der beiden größten Kreise, und halbirt darum jeden von ihnen.

170. Lehrsatz.

Jeder größte Kreis theilt sowohl die Oberfläche als die Kugel selbst in zwei congruente Theile, Halbkugeln genannt.

Beweis. Durch Deckung.

171. Lehrsatz.

In derselben Kugel oder in Kugeln von gleichen Halbmessern haben gleiche Kugelkreise vom Kugelmittelpunkt gleichen Abstand und umgekehrt.

Beweis. Aehnlich wie für gleiche Sehnen im Kreise; oder man legt durch die Abstände eine Ebene und erhält so Sehnen.

172. Lehrsatz.

In derselben Kugel oder in Kugeln von gleichen Halbmessern haben ungleiche Kugelkreise vom Mittelpunkt ungleichen Abstand und zwar hat der größere Kugelkreis den kleineren Abstand, und umgekehrt.

Beweis, 171.

173. Lehrsatz.

Verbindet eine Gerade die Mittelpunkte von Kugel und Kugelkreis, so steht sie senkrecht auf der Ebene des letztern.

Beweis. Zieht man nämlich (V. 13) im Kugelkreis den Durchmesser BB' und den Halbmesser AB'', dann die Kugelhalbmesser an die Punkte B, B' und B'', so sind die entstandenen Dreiecke congruent, daher

$\wedge$ MAB'' = $\wedge$ MAB' = $\wedge$ MAB, also jeder R, denn die letztern zwei sind Nebenwinkel.

Sonach steht MA $\perp$ AB und $\perp$ AB'', daher $\perp$ Eb. BAB''.

174. Zusatz.

1) Fällt man vom Mittelpunkt der Kugel eine Senkrechte auf die Ebene des Kugelkreises, so geht die Senkrechte durch den Mittelpunkt des letztern.

2) Errichtet man im Mittelpunkt eines Kugelkreises eine

Senkrechte auf die Ebene desselben, so geht diese Senkrechte, genugsam verlängert, durch den Mittelpunkt der Kugel.

Bemerkung. Auffindung des Kugel-Mittelpunktes.

175. Erklärung.

Errichtet man im Mittelpunkt eines Kugelkreises eine Senkrechte auf die Ebene desselben, so schneidet diese Senkrechte, genugsam verlängert, die Oberfläche der Kugel in zwei Punkten, welche die Pole des Kugelkreises genannt werden.

Der Durchmesser, welcher die beiden Pole verbindet, heißt Axe.

176. Lehrsatz.

Parallele Kugelkreise haben einerlei Axe und Pole.

Beweis. Errichtet man nämlich im Mittelpunkt des einen Kugelkreises eine Senkrechte auf deßen Ebene, so bestimmt diese Senkrechte die Pole. Sie muß aber

1) durch den Mittelpunkt der Kugel gehen [174,2], also ein Durchmesser sein;

2) auf der parallelen Ebene des andern Kugelkreises auch senkrecht stehen, daher

3) auch durch den Mittelpunkt des andern Kugelkreises gehen.

Dieselbe Gerade, Axe, welche die Pole des einen parallelen Kugelkreises bestimmt, bestimmt also auch die Pole des andern; diese parallelen Kugelkreise haben also einerlei Axe und Pole.

177. Lehrsatz.

Jeder Pol steht von allen Punkten des Umfanges seines Kugelkreises gleich weit ab, sowohl in gerader Linie als im Bogen des größten Kreises.

Beweis. Es sei (V. 13) im Mittelpunkt A des Kugelkreises eine Senkrechte auf deßen Ebene errichtet und dadurch Pol P bestimmt, ferner die beliebigen Halbmesser AB und AB″ gezogen und die Dreiecke ABP und AB″P hergestellt, so sind diese Dreiecke congruent, daher PB = PB″ u. s. w.

Denkt man sich nun durch M,B,P und M,B″, P Ebenen gelegt, so gehören in den entstandenen größten Kreisen zu den gleichen Sehnen PB und PB″ auch gleiche Bogen u. s. w.

Dasselbe kann auf die nämliche Art bezüglich des andern Poles bewiesen werden.

178. Zusatz.

Legt man durch die Axe von zwei parallelen Kugelkreisen größte Kreise, so sind die Bogen zwischen den parallelen Kugelkreisen gleich.

179. Lehrsatz.

Steht eine Gerade oder eine Ebene senkrecht auf dem Kugel-Halbmesser und zwar im Endpunkt, so berührt die Gerade oder die Ebene die Kugel.

Beweis. Aehnlich wie Eb. G. 206.

180. Lehrsatz.

Berührt eine Gerade oder eine Ebene die Kugel, so steht der Halbmesser des Berührungspunktes auf der Geraden oder der Ebene senkrecht.

Beweis. Aehnlich wie Eb. G. 207.

181. Lehrsatz.

Durch vier Punkte, welche nicht in einer Ebene liegen, läßt sich eine Kugel legen, aber nur eine.

Beweis. Die vier Punkte seien (V. 14) A, B, C, D, so kann man durch drei von ihnen, z. B. durch A, B, C, ebenso durch den vierten Punkt D und zwei von den bereits genommenen Punkten, z. B. B und C einen Kreis legen, und die beiden Kreise müssen eine gemeinsame Sehne BC haben.

Errichtet man nun im Mittelpunkt F von Kreis A, B, C eine Senkrechte FG auf Eb. A, B, C und im Mittelpunkt F' von B, C, D eine Senkrechte F'G' auf Eb. B, C, D, so müßen sich die beiden Senkrechten schneiden. Nämlich

1) Senkrechte, von F und F' aus auf BC gefällt, müßen den Fußpunkt E gemeinsam haben, weil jede der beiden Senkrechten die Sehne BC halbiren muß.

2) Wählt man nun in FG einen beliebigen Punkt, z. B. den Punkt G selbst und zieht GE, so muß GE $\perp$ BC sein [49], und mit FE und F'E in einer Ebene liegen [41], und in dieser selben Ebene liegt auch FG, der Punkte F und G wegen.

Auf dieselbe Art kann gezeigt werden, daß F'G' in der Ebene F, E, F' liegen muß.

3) Mithin liegen die beiden Geraden FG und F'G' mit FE und F'E in derselben Ebene, und stehen bezüglich senkrecht auf den zwei sich schneidenden Geraden FE und F'E, müßen daher selbst sich schneiden.

Dieser Schnittpunkt, er heiße H, ist der Mittelpunkt der gesuchten Kugel, denn er steht als Punkt der Senkrechten FG von den Punkten A, B und C [97], und als Punkt der Senkrechten F'G' von B, C und D, daher von allen vier Punkten A, B, C, D gleich weit ab.

Denkt man sich nun um H als Mittelpunkt mit dem Abstand dieses Punktes von einem der gegebenen Punkte z. B. mit HA als Halbmesser eine Kugel hergestellt, so müßen alle vier Punkte A, B, C, D in der Oberfläche dieser Kugel liegen [162, 2].

Es gibt aber nicht mehr als eine Kugel durch diese vier Punkte, denn die beiden geometrischen Örter FG und F'G' schneiden sich nur in einem Punkte.

Fünfter Abschnitt.

Gleichheit und Verhältniß von Prisma, Cylinder, Pyramide und Kegel.

A. Gleichheit.

182. Lehrsatz.

Parallelepipede sind gleich, wenn sie congruente Grundfläche und gleiche Höhe haben.

Beweis. Man kann jedenfalls die Parallelepipede so neben einander legen, daß die congruenten Grundflächen in derselben Ebene liegen und eine Seite (VI. 1) CD gemein haben, so müßen auch, der gleichen Höhe wegen, die andern Grundflächen $\overline{HF}$ und $\overline{hf}$ in einer Ebene liegen, aber bezüglich der Seitenflächen können zwei Fälle eintreten, nämlich

1) die Seitenflächen $\overline{Ae}$ und $\overline{De}$ können auch in einer Ebene liegen,

2) oder nicht.

Zu 1). Liegen $\overline{AE}$ und $\overline{De}$ in einer Ebene, so liegen auch $\overline{BF}$ und $\overline{Cf}$ in einer Ebene, und jede dieser Ebenen schneidet die Ebene der Grundflächen $\overline{HF}$ und $\overline{hf}$, was bezüglich in Eh und Fg geschieht.

Nun ist das vierseitige Prisma ADhHGgCB (Grundfläche BCgG) $\cong$ DdeEFfcC, und wenn man von jedem dieser Prismen das dreiseitige Prisma DhEFgC subtrahirt, bleiben die gegebenen Parallelepipede übrig, sind also gleich.

Zu 2). Liegen $\overline{AE}$ und $\overline{De}$ nicht in einer Ebene, so seien die beiden Parallelepipede so zusammengelegt (VI. 2), daß sie die Grundfläche $\overline{AC}$ gemein haben; dann müßen auch die andern Grundflächen $\overline{HF}$ und $\overline{hf}$ in einer Ebene liegen.

Denkt man sich nun die Ebenen AE, BF, Ag und Df erweitert, so werden die Kanten von der Ebene der Grundflächen $\overline{HF}$ und $\overline{hf}$ geschnitten, und es ergibt sich

als Kante von Eb.	AE und Ag	Ah'
" " " "	AE und Df	De'
" " " "	BF und Ag	Bg'
" " " "	BF und Df	Cf'.

Der Körper ABCDe'f'g'h' ist ein Parallelepipedon und für dasselbe ist in Bezug auf jedes der beiden gegebenen Parallelepipede der bereits bewiesene erste Fall vorhanden; sonach sind sie unter sich gleich, weil sie demselben dritten gleich sind.

183. Lehrsatz.

Legt man in einem schiefen dreiseitigen Prisma durch die Endpunkte einer beliebigen Seitenkante Ebenen senkrecht auf diese Kante, so entsteht bei gehöriger Erweiterung der Seitenflächen ein senkrechtes dreiseitiges Prisma, welches dem schiefen gleich ist.

Beweis. In dem schiefen dreiseitigen Prisma (VI. 3) ABCDEF sei auf die Seitenkante AF sowohl im Endpunkte A, als im Endpunkte F eine Ebene senkrecht gelegt, wodurch das senkrechte dreiseitige Prisma AB'C'D'E'F entsteht, so sind die beiden Prismen gleich.

Es ist nämlich ABCC'B' $\simeq$ FEDD'E', und wenn man zu jedem dieser beiden Körper den Körper ABCD'E'F addirt, erhält man die beiden Prismen, welche also gleich sind.

184. Lehrsatz.

Legt man durch zwei gegenüberstehende Seitenkanten eines Parallelepipedons eine Ebene, — Diagonal-Ebene —, so wird es dadurch halbirt.

Beweis. Für den Beweis unterscheiden wir zwei Fälle, ob nämlich das Parallelepipedon 1) senkrecht ist oder 2) schief.

Zu 1). Durch die Diagonal-Ebene AF wird das Parallelepipedon AF (VI. 4) in zwei congruente dreiseitige Prismen zerlegt, also halbirt.

Zu 2). Das schiefe P. ABCDEFGH (VI. 5) wird durch die Diagonal-Ebene AF in zwei schiefe (symmetrische) dreiseitige Prismen zerlegt, und diese müßen gleich sein.

Legt man nämlich durch H und A Ebenen $\perp$ AH, so entsteht bei gehöriger Erweiterung der Seitenflächen ein senkrechtes Parallelepipedon AB'C'D'E'F'G'H, welches durch die Diagonal-Ebene AF' halbirt wird, wie in 1) bewiesen wurde.

Nun ist aber Pr. ABCFGH = Pr. AB'C'F'G'H, und ebenso
Pr. ACDEFH = Pr. AC'D'E'F'H [183], also
Pr. ABCFGH = Pr. ACDEFH, da die beiden senkrechten dreiseitigen Prismen congruent sind.

Sonach wird auch das schiefe Parallelepipedon durch die Diagonal-Ebene halbirt.

185. Lehrsatz.

Parallelepipede sind gleich, wenn sie gleiche Grundfläche und gleiche Höhe, und wenn die gleichen Grundflächen eine Seite gleich haben.

Beweis. Es seien (VI. 6) die gleichen Grundflächen so übereinander gelegt, daß sie die gleiche Seite BC gemeinsam haben, so müßen auch die ihr gegenüberliegenden Seiten AD und A'D' in einer Geraden liegen.

Stellt man nun über den Grundflächen ABCD und A'BCD' senkrechte Parallelepipede von gleicher Höhe her, so laßen sich die drei Prismen ABCD'E'FGH, ABA'H'HG und DD'CFEE' unterscheiden, von welchen die letzteren zwei congruent sind.

Addirt man zu jedem der beiden letzteren Prismen das vierseitige, so erhält man die beiden Parallelepipede über ABCD und A'BCD', die also gleich sein müßen.

Man kann aber statt eines jeden dieser beiden Parallelepipede irgend ein anderes setzen, von congruenter Grundfläche und gleicher Höhe und es gilt demnach der Satz allgemein.

186. Lehrsatz.

Parallelepipede sind gleich, wenn sie gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben.

Beweis. Ist (VI. 7) ABCD die Grundfläche des einen gegebenen Parallelepipedons P, so sei (Eb. G. 317 Schluß) ein der Grundfläche ABCD gleiches Parallelogramm DEFG hergestellt, in welchem eine Seite, DE, gleich ist einer Seite der Grundfläche des andern gegebenen Parallelepipedons P', welches P. DEFG also auch dieser letzteren Grundfläche gleich sein muß, weil gleich ABCD.

Denkt man sich nun über ABCD und DEFG Parallelepipede von der gegebenen gleichen Höhe hergestellt, und zwar so, daß sie die durch D gehende Seitenkante gemein haben, so müßen diese beiden Parallelepipede gleich sein.

Es entstehen nämlich durch gehörige Erweiterung der Seitenflächen, welche durch die Grundkanten AB, BC, EF und GF gehen, und der andern Grundflächen Parallelepipede mit den Grundflächen H B J F, ADGH und CJED, alle von gleicher Höhe mit jenen über ABCD und DEFG.

Nun halbirt die durch H und J gehende Diagonal-Ebene sowohl das Parallelepipedon über HBJF, als jene über ADGH und CJED, und wenn man

1) von dem Prisma über HBJ jene über HAD und DCJ, dann

2) von dem Prisma über HFJ jene über HDG und DEJ, wegnimmt, so muß Gleiches bleiben, also sind die Parallelepipede über ABCD und DEFG gleich.

Statt des Parallelepipedons über DEFG kann man aber jedes andere setzen, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat, und deßen Grundfläche mit DEFG eine Seite gleich hat, also auch P', welches diese Eigenschaften hat.

187. Zusatz.

Dreiseitige Prismen sind gleich, wenn sie gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben, als die Hälften von gleichen Ganzen, nämlich von Parallelepipeden mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

188. Lehrsatz.

Beliebig viele dreiseitige Prismen von gleicher Höhe sind gleich einem dreiseitigen Prisma, das mit ihnen gleiche Höhe, aber die Summe ihrer Grundflächen zur Grundfläche hat.

Beweis. Es seien die Grundflächen der n einzelnen Prismen $g_1, g_2, \ldots gn$, G die Grundfläche des Prisma, das ihnen allen zusammengenommen gleich sein soll, und die Höhe eines jeden = h.

Es sei G durch Gerade, welche durch die Spitze dieses Dreieckes gehen und bis zum Durchschnitt mit der Grundlinie verlängert sind, in lauter Dreiecke zerlegt, welche den Dreiecken über g_1, $g_2, \ldots gn$ bezüglich gleich sind, (bei ungleicher Höhe mit Hilfe von Eb. G. 228).

Stellt man jetzt über allen Theil-Dreiecken senkrechte Prismen mit der Höhe h her, ebenso über G, wenn das gegebene über G nicht selbst senkrecht ist, so bilden die Prismen über den Theil-Dreiecken das senkrechte Prisma über G, letzteres ist also ihrer Summe gleich.

Ist das gegebene Prisma über G nicht senkrecht, so ist es doch dem senkrechten Prisma über G gleich, daher auch gleich der Summe der Prismen über den Theil-Dreiecken. Da ferner die Prismen über den Theil-Dreiecken bezüglich gleich sind den Prismen über g_1, $g_2, \ldots gn$, so ist auch die Summe der letzteren gleich dem gegebenen Prisma über G.

189. Lehrsatz.

Jedes nseitige Prisma ist gleich einem dreiseitigen, mit dem es gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Beweis. Es sei die Grundfläche G des n seitigen Prisma beliebig in Dreiecke zerlegt, z. B. durch die Diagonalen von einer Ecke aus, und die Grundfläche G' des gegebenen dreiseitigen Prisma auch von einer Ecke aus in Dreiecke, welche den erstgenannten bezüglich gleich sind.

Denkt man sich nun beim n seitigen Prisma durch die Seitenkante, welche durch die gewählte Ecke geht und durch die Diagonalen, beim dreiseitigen Prisma aber durch eben diese Seitenkante und die Theilungslinien der Grundfläche Ebenen gelegt, und gehörig erweitert, so sind die entstandenen Theil-Prismen alle bezüglich gleich, daher sind auch ihre Summen gleich, nämlich die beiden gegebenen Prismen.

190. Lehrsatz.

Prismen von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich.

Beweis. Jedes von ihnen ist gleich demselben dreiseitigen Prisma von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe mit den gegebenen Prismen, daher sind letztere selbst gleich.

191. Lehrsatz.

Der Cylinder ist gleich einem Prisma, welches mit ihm gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

Beweis. Denkt man sich dem Grundkreise des Cylinders ein regelmäßiges n Eck eingeschrieben und darüber ein senkrechtes Prisma von gleicher Höhe mit dem Cylinder hergestellt, so ist das Prisma ein Theil des Cylinders und daher kleiner als derselbe.

Stellt man aber ein solches Prisma über dem eingeschriebenen regelmäßigen 2n Eck her, so ist dieses Prisma zwar auch kleiner als der Cylinder, aber von demselben weniger verschieden als das erste.

Fährt man mit der Verdopplung der Seitenzahl und Herstellung der Prismen fort, so wird der Unterschied zwischen Prisma und Cylinder immer kleiner, und bei sehr großer Seitenzahl so klein, daß ohne merklichen Fehler das Prisma statt des Cylinders gesetzt werden darf.

Setzt man dieß noch weiter und ohne Ende fort, so geht das Prisma in den Cylinder über.

192. Lehrsatz.

Pyramiden sind gleich, wenn sie gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben.

Beweis. Es seien (VI. 9) in den Pyramiden abcd oder P und a'b'c'd' oder P' die Grundflächen abc oder g und a'b'c' oder g' gleich, ferner die Höhen gleich h.

Die gleichen Höhen seien in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zerlegt z. B. 5, und durch jeden Theilpunkt eine Ebene parallel zur Grundfläche gelegt und die Durchschnittsfiguren der Reihe nach, von der Spitze ausgehend, mit f_1, f_2, f_3, f_4, f'_1, f'_2, f'_3, f'_4 bezeichnet, so ist $f_1 = f'_1$, $f_2 = f'_2$ u. s. w. [147].

Stellt man nun in Pyr. P über jeder Durchschnitts-Figur

und über g ein Prisma her, nach der Spitze der Pyramide hin, und jedes mit einer Höhe $= \frac{1}{5}$ h, und es seien diese Prismen bezeichnet mit $p_1, p_2, \ldots p_5$. Sodann sei in Pyr. P' über jeder Durchschnittsfigur ein Prisma hergestellt mit Höhe $= \frac{1}{5}$ h, aber gegen die Grundfläche hin, und bezeichnet mit $p'_1, \ldots p'_4$.

Nun ist $p_1 = p'_1$, $p_2 = p'_2$, $p_3 = p'_3$, $p_4 = p'_4$, und

$$P < p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5, \text{ ferner}$$
$$P' > p'_1 + p'_2 + p'_3 + p'_4$$
$$\overline{\hspace{10em}}, \text{ also}$$
$$P - P' < p_5.$$

Man kann aber die Anzahl der gleichen Theile, in welche die gleichen Höhen zerlegt werden, beliebig groß nehmen, daher das letzte einzelne Prisma, oben p_5, beliebig klein machen, und immer läßt sich auf dieselbe Art wie oben zeigen, daß der Unterschied zwischen den beiden Pyramiden kleiner ist als das letzte, beliebig kleine Prisma.

Da nun der Unterschied zwischen den beiden Pyramiden kleiner ist als jede beliebige noch so kleine Größe, so ist der Unterschied Null, d. h. die Pyramiden sind gleich.

Der Einfachheit wegen sind in der Figur zwei dreiseitige Pyramiden gewählt, aber statt einer jeden derselben kann irgend eine andere von gleicher Grundfläche und Höhe gesetzt werden, da die Prismen p_1 p'_1 u. s. f. gleich sind, wenn sie nur gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben.

193. Lehrsatz.

Jedes Prisma ist gleich drei Pyramiden, welche mit ihm gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben.

Beweis. Der Einfachheit wegen sei (VI. 8) ein dreiseitiges Prisma ABCDEF gewählt, und durch F und BC eine Ebene gelegt, so hat

1) Pyr. ABCF mit dem Prisma gleiche Grundfläche und gleiche Höhe.

2) Denkt man sich Pyr. ABCF von dem Prisma weggenommen, so bleibt die vierseitige Pyr. BCDEF übrig, und eine durch B, F, D gelegte Ebene zerlegt dieselbe in die zwei dreiseitige Pyr. BCDF und BDEF, welche gleich sein müßen, wegen Grundfläche BCD = BDE, und gleicher Höhe, denn die Spitze F ist gemeinsam

und die Grundflächen liegen in derselben Ebene, also muß die Höhe gemeinsam sein.

3) In der Pyr. BDEF kann man auch DEF als Grundfläche betrachten, und dann ist ihre Spitze B, so daß also Pyr. DEFB = Pyr. ABCF ist [192].

Nun ist Pyr. ABCF = DEFB nach 3), und DEFB oder BDEF = BCDF, also sind alle drei Pyramiden gleich und das Prisma besteht aus ihnen.

Man kann aber statt der dreiseitigen Pyramide irgend eine andere von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe, ebenso statt des Prisma irgend ein anderes von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe setzen, daher gilt der Satz allgemein.

194. Lehrsatz.

Der Kegel ist gleich einer Pyramide, welche mit ihm gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

Beweis. Vgl. 191.

B. Verhältniß.

195. Lehrsatz.

Prismen von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen.

Beweis. Aehnlich Eb. G. 167.

196. Lehrsatz.

Prismen von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen.

Beweis. Aehnlich Eb. G. 167, mittels Theilung der Grundflächen durch ein gemeinschaftliches Maß, und Herstellung von Prismen über den Theilen, u. s. w.

197. Lehrsatz.

Prismen überhaupt verhalten sich wie die Produkte aus Grundfläche und Höhe.

Beweis. Aehnlich Eb. G. 171.

198. Zusatz.

Wie sich Prismen verhalten, müßen sich auch Cylinder ver-

halten [184]; da jedoch die Grundflächen Kreise sind, kann man sagen:

1) Cylinder von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundkreise, also wie die Quadrate der Halbmesser oder Durchmesser der Grundkreise.

2) Cylinder von gleichen Grundkreisen verhalten sich wie ihre Höhen.

3) Cylinder überhaupt verhalten sich wie die Produkte aus Grundkreis und Höhe.

199. Zusatz.

Wie sich Prismen verhalten, verhalten sich auch Pyramiden, [193].

200. Zusatz.

Wie sich Pyramiden verhalten, müßen sich auch Kegel verhalten [194]; da jedoch die Grundflächen Kreise sind, u. s. w. [198].

Sechster Abschnitt.

Messung.

A. Messung der Oberflächen.

201. Erklärung.

Unter Oberfläche eines Körpers versteht man die Summe aller Grenzflächen desselben, und wenn die Größe angegeben werden soll, die Summe der Maßzahlen aller Grenzflächen.

202. Zusatz.

Man findet die Oberfläche 1) des Prisma, indem man zur doppelten Grundfläche,

2) der Pyramide, indem man zur Grundfläche,

3) der abgekürzten Pyramide, indem man zur Summe der Grundflächen die Summe der Seitenflächen addirt.

203. Lehrsatz.

Der Mantel des Cylinders ist gleich einem Rechtecke, dessen Grundlinie gleich ist dem Umfange des Grundkreises und dessen Höhe gleich ist der Höhe des Cylinders, also Mantel $= 2\,r\,\pi\,h$.

Beweis. Vgl. 191; oder:

Denkt man sich in einem Cylinder durch den Endpunkt A (VII. 1) eines beliebigen Halbmessers MA des Grundkreises eine Ebene senkrecht auf den Halbmesser hergestellt, so muß diese Ebene auch die Seite Aa enthalten und die Kanten dieser Ebene mit den Ebenen der Grundkreise seien AB und ab, so ist AB $\parallel$ ab.

Denkt man sich nun den Cylinder um die Axe gedreht und zugleich auf der Ebene so fortbewegt, daß AB und ab stets die Kanten bleiben, so kommen nach und nach immer andere Punkte der Kreisumfänge und des Mantels in die Ebene zu liegen, und wenn alle Punkte der Umfänge in die Ebene zu liegen gekommen sind, ist dieß auch mit allen Punkten des Mantels der Fall.

Es ist demnach ein Rechteck AB ba entstanden, denn AB $\parallel$ ab und Aa $\perp$ Bb [39], und es ist Ab $= 2\,r\,\pi$ und Aa $=$ h, also Mantel $=$ Rechteck $= 2\,r\,\pi\,h$.

Bemerkung. Berührungs-Ebene des Cylinders.

204. Zusatz.

Die Oberfläche des Cylinders ist also $2\,r^2\,\pi + 2\,r\,\pi\,h = 2\,r\,\pi\,(r + h)$ d. h. gleich einem Rechteck, welches den Umfang des Grundkreises zur Grundlinie und die Summe aus dem Halbmesser desselben und der Höhe des Cylinders zur Höhe hat.

205. Zusatz.

Der Mantel des gleichseitigen Cylinders ist $4\,r^2\,\pi$ und die Oberfläche $6\,r^2\,\pi$.

206. Lehrsatz.

Der Mantel des Kegels ist gleich einem Dreieck, welches den Umfang des Grundkreises zur Grundlinie und die Seite des Kegels zur Höhe hat, also Mantel $= r\,\pi\,s$.

Beweis. Vgl. 194, 191, oder:

Denkt man (VII. 2) sich eine Ebene in solcher Lage, daß eine

Seite des Kegels in der Ebene liegt, z. B. Aa, dann den Kegel um die Axe gedreht und zugleich auf der Ebene so fortbewegt, daß die Spitze immer an derselben Stelle bleibt, so kommen nach und nach immer andere Punkte des Kreis-Umfanges und des Mantels in die Ebene zu liegen, und wenn alle Punkte des Umfanges in die Ebene zu liegen gekommen sind, ist dieß auch mit allen Punkten des Mantels der Fall.

Es ist demnach ein Kreis-Ausschnitt Aaa' entstanden, deßen Bogen gleich dem Umfang des Grundkreises, also $= 2\, r\, \pi$, und dessen Kreis-Halbmesser die Seite s des Kegels ist, also Ausschnitt = Mantel $= \frac{1}{2} . 2\, r\, \pi\, .\, s = r\, \pi\, s$.

Bemerkung. Berührungs-Ebene des Kegels.

207. Zusatz.

Die Oberfläche des Kegels ist also $r^2 \pi + r \pi s = r \pi (r + s)$ d. h. gleich einem Dreieck u. s. w.

208. Zusatz.

Der Mantel des gleichseitigen Kegels ist $2\, r^2 \pi$ und die Oberfläche $3\, r^2 \pi$.

209. Lehrsatz.

Der Mantel des abgekürzten Kegels wird ausgedrückt durch $(R + r) \pi s$, wenn nämlich R und r die Halbmesser der Grundkreise und s die Seite des abgekürzten Kegels bezeichnet.

Beweis. Es sei der abgekürzte Kegel (VII. 3) ergänzt und durch die Axe AB und Seite AC eine Ebene gelegt, so ergeben sich die parallelen Halbmesser BC und bc und es ist

$$\text{M. d. abg. K.} = BC\, \pi\, .\, AC - bc\, \pi\, .\, Ac$$
$$= \pi\, (R\, .\, AC - r\, (AC - Cc))$$
$$= \pi\, ((R - r)\, AC + r\, .\, Cc).$$

Um AC auszudrücken, hat man

$BC : bc = AC : Ac$, oder

$R : r = AC : Ac$, also

$R - r : AC - Ac = R : AC$, also

$$AC = \frac{R\, .\, Cc}{R - r}.$$ Mithin ist

$$\text{M. d. abg. K.} = \pi \left((R - r) . R . \frac{Cc}{R - r} + r . Cc \right)$$

$$= \pi (R + r) . Cc = (R + r) \pi s.$$

210. Zusatz.

Ist statt der Seite die Höhe gegeben, so ist

1) Mantel d. K. $= r \pi \sqrt{h^2 + r^2}$, und

2) M. d. abg. K. $= (R + r) \pi \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$.

211. Erklärung.

Unter Zone versteht man einen Theil der Kugel-Oberfläche, welcher zwischen zwei parallelen Kugelkreisen liegt, oder zwischen Kugelkreis und Pol.

Eine Zone der letzteren Art heißt auch Kugelhaube, calotte.

Höhe heißt bei der ersteren Art der Abstand der parallelen Ebenen, bei der letzteren Art die Senkrechte vom Pol auf die Ebene des Kugelkreises gefällt.

212. Lehrsatz.

Die Zone wird ausgedrückt durch $2 r \pi h$, wenn r den Kugel-Halbmesser und h die Höhe bezeichnet.

Beweis. 1) Zone zwischen parallelen Kugelkreisen.

Es seien die beiden Kreis-Mittelpunkte durch eine Gerade verbunden, so geht diese Gerade, nöthigenfalls verlängert, durch den Mittelpunkt der Kugel und steht auf beiden Ebenen senkrecht, ist also die Höhe der Zone.

Diese Höhe sei nun in eine überaus große Anzahl von gleichen Theilen zerlegt, und durch jeden Theilpunkt eine Ebene parallel zu den parallelen Kreisen gelegt, so zerfällt die Zone in Theil-Zonen von gleicher und so kleiner Höhe, daß, wenn man durch die Höhe einen größten Kreis legt, die Bogen zwischen den parallelen Grundkreisen der Theilzone und die zugehörigen Sehnen für einander genommen werden dürfen.

Es sei nun (VII. 4) ABCD der (der Anschaulichkeit wegen größer dargestellte) Durchschnitt einer Theilzone nnd der durch die Höhe gelegten Ebene, dann MG $\perp$ CD und schneide AB in H, so entsteht, wenn man AHGC um HG vollständig gedreht denkt, die

Theilzone, welche, dem Gesagten gemäß, als Mantel eines abgekürzten Kegels betrachtet werden kann, und es ist

$$\text{Theilzone} = \text{M. d. abg. K.} = (AH + CG)\,\pi\,.\,AC.$$

Zieht man nun durch den Halbirungspunkt J von GH eine Parallele EJ zu AH, so ist

$$EJ = \tfrac{1}{2}\,(AH + CG), \text{ also}$$

$$\text{Theilzone} = 2\,EJ\,\pi\,.\,AC.$$

Da aber EJ und AC nicht gegeben sind, so suchen wir sie auf bekannte Größen zurückzuführen, und fällen deßhalb $EK \perp CD$, wodurch $\triangle$ CEK entsteht, und zieht man noch EM, so ist $\triangle CEK \sim \triangle EJM$, denn diese rechtwinkligen Dreiecke haben $\wedge CEK = \wedge JEM$, da von diesen beiden Winkeln jeder mit $\wedge KEM = R$ ist [Eb. G. 200, 3 und 54].

Aus der Aehnlichkeit der genannten Dreiecke folgt

$$CE : EK = EM : EJ, \text{ also}$$

$$EJ = \frac{EK\,.\,r}{CE}.$$

Setzt man diesen Werth oben ein, und schreibt statt AC 2 EC, so ist

$$\text{Theilzone} = 2\,.\,\frac{EK\,.\,r}{EC}\,.\,\pi\,.\,2\,EC = 4\,r\,\pi\,.\,EK.$$

Es ist aber EK die halbe Höhe der Theilzone, und wenn man die ganze Höhe der Theilzone mit h′ bezeichnet, ist

$$\text{Theilzone} = 4\,r\,\pi\,.\,\tfrac{1}{2}\,h' = 2\,r\,\pi\,h'.$$

Denselben Ausdruck findet man auf dieselbe Art für jede andere Theilzone, und es ist daher Zone = Summe aller Theil-Zonen

$$= 2\,r\,\pi\,h' + 2\,r\,\pi\,h' + \ldots\ldots = 2\,r\,\pi\,(h' + h' + \ldots\ldots)$$
$$= 2\,r\,\pi\,h.$$

2) Kugelhaube.

Verfährt man mit der Höhe wie vorhin, so wird die Kugelhaube in lauter Zonen zerlegt, von denen eine selbst wieder eine Kugelhaube ist. Man kann aber die letztere*) betrachten als Zone der ersten Art, worin jedoch ein Halbmesser = 0 ist.

Die Summe aller Theilzonen gibt die Kugelhaube $= 2\,r\,\pi\,h$.

---

*) oder auch die ganze Kugelhaube.

213. Zusatz.

1) Die krumme Oberfläche der Halbkugel kann als Zone von der Höhe r betrachtet werden, und es ist die halbe Oberfläche der Kugel $= 2\,r\,\pi\,.\,r = r^2\,\pi$, und die ganze Oberfläche $= 4\,r^2\,\pi$.

2) Es ist $4\,r^2\,\pi = d^2\,\pi$, also die Oberfläche der Kugel gleich einem Kreise, welcher den Durchmesser der Kugel zum Halbmesser hat.

214. Erklärung.

Ein keilförmiger Ausschnitt ist jener Theil der Kugel, welcher zwischen zwei größten Halbkreisen liegt, die einen Durchmesser gemeinsam haben, und der Theil der Kugel-Oberfläche, welcher zwischen den zwei größten Halbkreisen liegt, heißt Kugel-Zweieck.

215. Lehrsatz.

Zu gleichen Neigungswinkeln von größten Halbkreisen gehören in derselben Kugel oder in Kugeln von gleichen Halbmessern gleiche keilförmige Ausschnitte und gleiche Kugel-Zweiecke.

Beweis, ähnlich wie Eb. G. 192.

216. Lehrsatz.

In derselben Kugel oder in Kugeln von gleichen Halbmessern verhalten sich die keilförmigen Ausschnitte und die Kugelzweiecke wie die zugehörigen Neigungswinkel.

Beweis, ähnlich Eb. G. 197.

217. Zusatz.

Also besteht die Proportion

K. Zweieck : K. Oberfläche $= n^{\circ} : 360^{\circ}$, und es ist

$$\text{Kugel-Zweieck} = \frac{4\,r^2\,\pi\,.\,n^{\circ}}{360^{\circ}}$$

218. Erklärung.

Unter einem dreiseitigen pyramidalen Ausschnitt versteht man den Theil der Kugel, welcher zwischen den Seiten eines Dreikantes liegt, deßen Spitze der Kugel-Mittelpunkt ist.

Der Theil der Kugel-Oberfläche, welcher zwischen den Seiten des Dreikantes liegt, heißt Kugel- oder sphärisches Dreieck.

219. Zusatz.

1) Da die Seiten des Dreikantes den Seiten des Kugel-Dreieckes, und die Winkel des Dreikantes den Winkeln des Kugel-Dreieckes gleich sind, so gelten die Sätze vom Dreikant auch vom Kugel-Dreieck, so lange die Seiten nur im Bogenmaß ausgedrückt sind.

2) Sind die Dreikante symmetrisch, so entstehen, wenn man um ihre Spitzen als Mittelpunkt mit gleichen Halbmessern Kugeln herstellt, symmetrische Kugel-Dreiecke.

220. Lehrsatz.

Symmetrische Kugel-Dreiecke sind gleich.

Es sei (VII. 5) ABC ein Kugel-Dreieck und der Punkt D innerhalb desselben sei sein Pol. Stellt man nun das Scheitel-Dreikant zu ABCM her, so entsteht das Kugel-Dreieck A'B'C |∽| ABC.

Denkt man sich je durch die drei Punkte: D, eine Ecke und M eine Ebene gelegt, so sind die Bogen DA, DB und DC gleich, und bei gehöriger Erweiterung dieser Ebenen erhält man in A'B'C' den Pol D' in der Verlängerung von DM, und es ist Bg. D'A' = D'B' = D'C', aber auch Bg. AB = Bg. A'B' u. s. w., der Scheitelwinkel wegen.

Die Theil-Dreiecke stimmen also bezüglich in allen Seiten überein, sind also weil gleichschenklig, alle bezüglich congruent.

Werden nun die Theil-Dreiecke entsprechend addirt, so ist

$$\triangle\ ABC = \triangle\ A'B'C'.$$

Fällt der Pol D nicht in das △ ABC, sondern in eine Seite oder außerhalb des △, so läßt sich der Beweis doch auf ähnliche Art führen, gilt also allgemein.

221. Erklärung.

Unter sphärischen Exceß versteht man den Quotienten aus dem Betrag, um welchen die Winkelsumme des Kugel-Dreieckes 180° übersteigt, und aus 180° selbst.

222. Lehrsatz.

Das Kugel-Dreieck wird ausgedrückt durch das Produkt aus einem größten Kreise in den sphärischen Exceß.

Beweis. Die Neigungswinkel des Kugel-Dreieckes A, B, C (VI, 6) seien mit A, B, C bezeichnet, sodann seien die Durchmesser AD, BE, CF gezogen, ferner

Seite BC zu Halbkreis BCE und Bg. CE zu Halbkreis CEF, ebenso

Seite AC zu Halbkreis ACD und Bg. CD zu Halbkreis CDF vergrößert, so ist:

$\triangle$ ABC = K. Zw. ACDBA — $\triangle$ BCD,

$\triangle$ ABC = K. Zw. BCEAB — $\triangle$ ACE und; wegen ABC = DEF

$\triangle$ ABC = K. Zw. CEFDC — $\triangle$ CDE.

Sonach ist

$$3 \triangle ABC = \frac{4 r^2 \pi . A}{360^0} + \frac{4 r^2 \pi . B}{360^0} + \frac{4 r^2 \pi . C}{360^0}$$
$$- (\triangle BCD + \triangle ACE + \triangle CDE), \text{ also}$$

$$2 \triangle ABC = \frac{4 r^2 \pi}{360^0} (A + B + C)$$
$$- (\triangle BCD + \triangle ACE + \triangle CDE + \triangle ABC), \text{ folglich}$$

$$\triangle ABC = \frac{r^2 \pi}{180^0} (A + B + C) - r^2 \pi$$
$$= \frac{r^2 \pi}{180^0} (A + B + C - 180^0)$$
$$= r^2 \pi . \; E,$$

wenn nämlich E den sphärischen Exceß bezeichnet.

223. Erklärung.

Denkt man sich über einem Kugelkreise einen Kegel hergestellt, mit dem Mittelpunkt der Kugel als Spitze, so nennt man den Körper, welcher aus diesem Kegel und dem zugehörigen Kugelabschnitt besteht, einen kegelförmigen Ausschnitt.

224. Zusatz.

Die Oberfläche des kegelförmigen Ausschnittes besteht aus der Kugelhaube und dem Kegelmantel, wird also durch die Summe aus diesen beiden Größen ausgedrückt.

B. Messung der Körper.

225. Erklärung.

Einen Körper messen heißt angeben, wie oft ein als Einheit angenommener Körper in demselben enthalten ist.

Als Einheit für die Körpermessung dient ein Würfel, deßen Kante 1 Meter ist, und welcher Kubikmeter genannt wird.

Die Theile und Vielfachen des Kubikmeters werden wie beim Längen- und Flächenmaß bezeichnet, Kubik-Decimeter, Kubik-Dekameter u. s. w.

Denkt man sich die Grundfläche des Kubik-Meters in 100 Quadrat-Decimeter getheilt und über jedem derselben ein senkrechtes Parallelepipedon von 1 Meter Höhe hergestellt, so ist der Kubikmeter in 100 solche Parallelepipede getheilt. Theilt man nun eine Seitenkante des Kubikmeters in 10 Decimeter und legt durch jeden Theilpunkt eine Ebene parallel zur Grundfläche, so wird jedes der 100 Parallelepipede in 10 Würfel zerlegt, von denen jeder 1 Quadrat-Decimeter zur Grundfläche hat, also ein Kubik-Decimeter ist.

Es hat also 1 Kubikmeter 1000 Kubik-Decimeter u. s. w.

Die Einheit für das Holzmaß heißt Stere und ist = 1 Kubik-Meter.

Die Einheit für das Flüßigkeitsmaß heißt Liter und ist = 1 Kubik-Decimeter.

Hectoliter ist die Einheit für das Getreide-Maß.

Früher war:

die Einheit des Körpermaßes der Kubikfuß = 1000c'' d oder 1728c'' dd u. s w.

Einheit für das Holzmaß die Klafter, 6' lang, 6' hoch, $3^1/_2$ breit.

Flüßigkeitsmaß der Eimer zu 60 Maß.

Getreidemaß das Schäffel = 208 Maß, getheilt in 6 Metzen u. s. w.

Besonders zu bemerken ist die Kubik-Meile.

226. Lehrsatz.

Denkt man sich Grundfläche und Höhe eines Prisma gemessen, (und zwar die Höhe mit der Seite der Flächeneinheit) so findet man den Inhalt des

Prisma, wenn man (die Maßzahlen von) Grundfläche und Höhe multiplizirt, also Prisma = G . h.

Beweis. Wie Eb. G. 177.

227. Zusatz.

1) Rechtwinkl. Parallelepipedon = a . b . c, wenn a, b und c Kanten bezeichnen, die an derselben Ecke zusammenstoßen.

Würfel = a^3 . Cylinder = $r^2 \pi h$.

2) Pyramide = $\frac{1}{3}$ G . h, Kegel = $\frac{1}{3} r^2 \pi h$.

228. Lehrsatz.

Bezeichnet G die größere, g die kleinere Grundfläche, und h die Höhe einer abgekürzten Pyramide, so ist

$$\text{Abg. Pyr.} = \frac{1}{3} h (G + \sqrt{G . g} + g)$$

Beweis. Die abgekürzte Pyramide BCDEedcb (V. 4) sei zur Pyr. BCDEA ergänzt, ferner Af $\perp$ Eb. g gefällt und verlängert bis zum Durchschnitt mit Eb. G, in F, so ist fF = h und

$$\text{Abg. Pyr.} = \frac{1}{3} . BCDE . AF - \frac{1}{3} \text{ bcde} . Af$$
$$= \frac{1}{3} \big(G . (Af + h) - g\, Af\big)$$
$$= \frac{1}{3} \big(G . h + (G - g) . Af\big).$$

Um Af auf die bekannten Größen zurückzuführen, haben wir

$$G : g = \overline{AF}^2 : \overline{Af}^2, \text{ also}$$
$$\sqrt{G} : \sqrt{g} = Af + h : Af, \text{ also}$$
$$Af = \frac{h \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}. \text{ Hienach ist}$$

$$\text{Abg. Pyr.} = \frac{1}{3} \left(G . h + (G - g) . \frac{h \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}\right)$$
$$= \frac{1}{3} h (G + \sqrt{G . g} + g).$$

229. Lehrsatz.

Bezeichnet R den Halbmesser des größeren, r den Halbmesser des kleineren Grundkreises, ferner h die Höhe einer abgekürzten Pyramide, so ist

$$\text{Abg. Pyr.} = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + R . r + r^2).$$

Beweis. Vgl. 228.

230. Lehrsatz.

Bezeichnet r den Halbmesser der Kugel und h die Höhe des im kegelförmigen Ausschnitt mitbegriffenen Kugel-Abschnittes, so ist

$$\text{Kegelf. Ausschnitt} = \frac{2}{3} r^2 \pi h.$$

Beweis. Denkt man sich nämlich durch den Kugel-Mittelpunkt Ebenen gelegt, so daß die Kugelhaube in eine überaus große Zahl von gleichen Dreiecken zerlegt wird, so zerfällt der kegelförmige Ausschnitt in lauter dreiseitige pyramidale Ausschnitte, deren Grundflächen so kleine Kugel-Dreiecke sind, daß man sie ohne merklichen Fehler als ebene Dreiecke betrachten, also die pyramidalen Ausschnitte als dreiseitige Pyramiden und die Höhe gleich den Kugel-Halbmesser nehmen darf.

Hienach ist der kegelförmige Ausschnitt gleich der Summe all dieser Pyramiden, also

$$\text{Kegelf. Ausschnitt} = \frac{1}{3} . \triangle_1 . r + \frac{1}{3} . \triangle_2 . r + \ldots .$$
$$= \frac{1}{3} r . (\triangle_1 + \triangle_2 + \ldots)$$
$$= \frac{1}{3} r . 2 r \pi h = \frac{2}{3} r^2 \pi h.$$

231. Lehrsatz.

Bezeichnet r den Halbmesser der Kugel und h die Höhe des Kugel-Abschnittes, so ist Kugel-Abschnitt $= \frac{1}{3} \pi h^2 (3 r - h)$.

Beweis. Es ist (VII. 7).

$$\text{Kug. Absch.} = \text{Kegelf. Aussch.} - \text{Kegel}$$
$$= \frac{2}{3} r^2 \pi h - \frac{1}{3} . \overline{BD}^2 \pi . AB.$$

Um AB und BD auf die bekannten Größen zurückzuführen, haben wir

$$AB = AC - BC = r - h, \text{ und}$$
$$\overline{BD}^2 = r^2 - (r - h)^2$$
$$= h (2 r - h).$$

Sonach ist

$$\text{Kug. Absch.} = \frac{2}{3} r^2 \pi h - \frac{1}{3} . h (2 r - h) \pi . (r - h)$$
$$= \frac{1}{3} \pi h^2 (3 r - h).$$

232. Zusatz.

Die Halbkugel läßt sich als Kugel-Abschnitt mit $h = r$ betrachten, also ist Halbkugel $= \frac{2}{3} r^2 \pi \cdot r = \frac{2}{3} r^3 \pi$ und Kugel $= \frac{4}{3} r^3 \pi$.

233. Lehrsatz.

Der Inhalt des keilförmigen Ausschnittes wird ausgedrückt durch $\frac{r^3 \pi \cdot n^0}{270^0}$.

Beweis. Vgl. 217.

234. Lehrsatz.

Der Inhalt eines dreiseitigen pyramidalen Ausschnittes wird ausgedrückt durch $\frac{1}{3} r^3 \pi \cdot E$.

Beweis. Vgl. 224.

235. Lehrsatz.

Der Körper-Inhalt einer Zone kann bestimmt werden als die Differenz zweier Kugel-Abschnitte.

Siebenter Abschnitt.

Lehrsätze und Aufgaben.

1. Haben zwei beliebige Punkte A und B, auf derselben Seite einer Ebene, bezüglich von den Punkten A' und B' dieser Ebene parallele und gleiche Abstände, so ist die Gerade AB parallel zu der Ebene.

2. Legt man durch eine Gerade, welche zu einer Ebene parallel ist, beliebig viele Ebenen, welche die gegebene Ebene schneiden, so sind alle Kanten parallel.

3. Durch eine Gerade eine Ebene zu legen, welche zu einer gegebenen Ebene parallel ist.

4. Haben drei Punkte, welche auf derselben Seite einer Ebene und nicht in einer Geraden liegen, gleiche und parallele Ab-

stände von drei Punkten dieser Ebene, so ist die gegebene Ebene parallel zu der Ebene der drei Punkte.

5. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche parallel ist zu zwei parallelen Ebenen, und

6. parallel zu zwei sich schneidenden Ebenen.

7. Ist eine Gerade parallel zu einer von zwei sich kreuzenden Geraden, so kann sie zur andern nicht parallel sein.

8. Haben beliebig viele Gerade, welche alle zur nämlichen Ebene parallel sind, einen Punkt gemeinsam, so liegen sie alle in einer Ebene, welche zur gegebenen parallel ist.

9. Durch eine von zwei sich kreuzenden oder parallelen Geraden eine Ebene zu legen, welche zur andern Geraden parallel ist.

10. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche zu einer gegebenen Ebene parallel ist.

11. Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene parallel zu einer gegebenen Geraden zu legen.

12. Durch einen Punkt eine Ebene zu legen, welche zu zwei parallelen Geraden parallel ist;

13. parallel zu zwei sich schneidenden und

14. parallel zu zwei sich kreuzenden Geraden.

15. Durch jeden Punkt außerhalb einer Ebene gibt es zu derselben beliebig viele parallele Gerade.

16. Ist eine Ebene zu einer von zwei parallelen Geraden parallel, so ist sie auch zur andern parallel.

17. Wird eine Gerade, welche zu einer Ebene parallel ist, von einer zweiten Ebene geschnitten, so muß auch die erste Ebene von der zweiten geschnitten werden.

18. Werden zwei Gerade von drei parallelen Ebenen geschnitten, so stehen die gleichliegenden Abschnitte zwischen den Ebenen in gleichem Verhältniß, die Geraden mögen sich schneiden, oder

19. sich kreuzen, oder

20. parallel sein.

21. Sind die Ebenen und zwei Schenkel von zwei gleichen Winkeln parallel, so sind auch die zwei andern Schenkel parallel, wenn sowohl die zwei parallelen Schenkel als die zwei andern Schenkel je auf der nämlichen Seite der Ebene liegen, welche durch den dritten Schenkel und einen beliebigen Punkt des vierten gelegt werden kann.

22. Stehen drei Gerade in Einem Punkte auf einander senkrecht, so steht jede dieser drei Geraden senkrecht auf der Ebene der beiden andern.

23. Ist AB parallel Ebene MN und fällt man von einem beliebigen Punkte C der Geraden AB die CD ⊥ Eb. MN, so ist auch CD ⊥ AB.

24. Eine Gerade kann niemals auf zwei sich schneidenden Ebenen senkrecht stehen, weder in demselben Punkte,

25. noch in verschiedenen Punkten.

26. Stehen zwei sich schneidende Gerade in demselben Punkte senkrecht auf einer dritten Geraden, letztere aber senkrecht auf einer Ebene, so ist diese Ebene parallel zur Ebene, welche durch die beiden sich schneidenden Geraden gelegt werden kann.

27. Die kürzeste von allen Geraden zu bestimmen, welche zwischen Punkten von zwei sich kreuzenden Geraden möglich sind.

28. Wählt man auf derselben Seite einer Ebene zwei (oder mehrere in einer Geraden liegende) Punkte in gleichen Abständen von derselben, so ist die Gerade, welche diese zwei (oder mehr) Punkte verbindet, zur Ebene parallel.

29. Haben drei nicht in einer Geraden liegende Punkte auf derselben Seite einer Ebene gleichen Abstand von ihr, so ist sie parallel zur Ebene, welche durch die drei Punkte bestimmt ist.

30. Hat man von einem Punkte außerhalb einer Ebene eine Senkrechte auf die Ebene gefällt und zwei ungleiche schiefe nach Punkten derselben gezogen, so hat der Fußpunkt der größern schiefen Geraden den größeren Abstand vom Fußpunkt der Senkrechten,

31. und umgekehrt.

32. Sind die Schenkel zweier Flächenwinkel bezüglich parallel, so sind die Scheitel derselben auch parallel.

33. Sind die Schenkel zweier Flächenwinkel bezüglich parallel, so sind die Winkel gleich, wenn jedes parallele Schenkelpaar auf der gleichen Seite der durch die Scheitel gelegten Ebene liegt; oder auch,

34. wenn von den parallelen Schenkeln je einer auf der einen und je einer auf der andern Seite dieser Ebene liegt.

35. Sind die Schenkel zweier Flächenwinkel parallel, so betragen diese Winkel einen geraden, wenn zwei parallele Schenkel auf derselben Seite der durch die Scheitel gelegten Ebene liegen, die andern zwei parallelen Schenkel aber zu verschiedenen Seiten dieser Ebene.

36. Steht eine Gerade senkrecht auf einer von zwei Ebenen, die selbst auf einander senkrecht stehen, so ist die Gerade zur andern Ebene parallel.

37. Durch den Fußpunkt einer auf einer Ebene schiefen Geraden läßt sich in der Ebene immer eine Gerade ziehen, welche auf der schiefen Geraden senkrecht steht, aber nur eine.

38. Parallele Ebenen werden von derselben Geraden unter gleichen Neigungswinkeln geschnitten.

39. Parallele Gerade schneiden eine Ebene unter gleichen Neigungswinkeln.

---

40. Steht eine Ebene senkrecht auf einer Geraden und zwar im Halbirungspunkte, so hat jeder Punkt außerhalb dieser Ebene von den Endpunkten dieser Geraden ungleichen Abstand und zwar hat er einen kleineren Abstand von jenem Endpunkt, mit welchem er auf derselben Seite der Ebene liegt.

41. Welches ist der geometrische Ort jener Punkte, die von einer Ebene (auf derselben Seite) gleichen,

42. einen gegebenen,

43. von zwei parallelen Ebenen gleichen Abstand haben?

44. Eine Ebene zu einer gegebenen Geraden parallel zu legen und zwar in gegebenem Abstand.

45. Der geometrische Ort jener Punkte, deren jeder von der einen von zwei sich schneidenden Geraden gleichen Abstand hat wie von der andern, ist die Ebene, welche den Winkel dieser Geraden halbirt und auf der Winkel-Ebene senkrecht steht.

46. Welches ist der geometrische Ort derjenigen Geraden, welche auf einer gegebenen Geraden und zwar im selben Punkte dieser Geraden senkrecht stehen?

47. Welches ist der geometrische Ort jener Geraden, welche eine gegebene Gerade im selben Punkte schneiden, so daß sie alle mit der gegebenen Geraden gleiche Winkel bilden?

---

48. Schneidet man in einem Dreikant vom Scheitel aus gleiche Theile von den Kanten ab und legt durch die so gefundenen Punkte der Kanten eine Ebene, so ist der Fußpunkt der Geraden, welche vom Scheitel aus auf diese Ebene senkrecht gefällt wird, der Mittelpunkt des dem Dreieck der drei Punkte umschriebenen Kreises.

49. Hat ein Dreikant zwei gleiche Winkel, so liegen diesen

gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber. Dieß zu beweisen, mit dem Scheitel-Dreikant, und

50. mit dem Ergänzungs-Dreikant.

51. Legt man durch die Halbirungslinien zweier Seiten eines Dreikantes je eine Ebene senkrecht auf die betreffende Seite, so bildet die Kante der zwei senkrechten Ebenen mit den Kanten des Dreikantes gleiche Winkel.

52. Legt man durch die Halbirungslinien der Seiten eines Dreikantes Ebenen senkrecht auf die bezüglich halbirten Seiten, so schneiden sich diese Ebenen in einer Geraden.

53. Der geometrische Ort jener Punkte, deren jeder von den Kanten eines Dreikantes gleiche Abstände hat, ist die Kante jener zwei Ebenen, welche zwei Seiten des Dreikantes halbiren und auf den bezüglich halbirten Seiten senkrecht stehen.

54. Halbirt man zwei beliebige Winkel eines Dreikantes, so steht jeder Punkt der Kante dieser Halbirungs-Ebenen von den Seiten des Dreikantes gleich weit ab.

55. Die Halbirungs-Ebenen der Winkel eines Dreikantes schneiden sich in einer Geraden.

56. Ebenen durch die Kanten und die Halbirungslinien der ihnen gegenüberliegenden Seiten eines Dreikantes gelegt, schneiden sich in einer Geraden.

---

57. Hat ein Vierkant zwei Paare gleicher Seiten und hat jedes dieser gleichen Seitenpaare eine Kante gemeinsam, so zerlegt eine durch diese zwei Kanten gelegte Ebene das Vierkant in zwei symmetrische Dreikante.

58. Sind in einem Vierkant die gegenüberstehenden Seiten gleich, so wird es durch jede Diagonal-Ebene (d. h. durch zwei gegenüberstehende Kanten gelegt) in zwei congruente Dreikante zerlegt.

59. Sind in einem Vierkant die gegenüberliegenden Seiten gleich, so sind auch die gegenüberliegenden Winkel gleich.

60. Ergänzungs-Vierkant.

61. Sind in einem Vierkant die gegenüberliegenden Winkel gleich, so sind auch die gegenüberliegenden Seiten gleich.

62. Sind in einem Vierkant die gegenüberstehenden Seiten oder

63. die gegenüberstehenden Winkel gleich, so halbiren sich die Winkel der gegenüberliegenden Kanten.

64. Halbiren sich die Winkel der gegenüberliegenden Kanten eines Vierkantes, so sind die gegenüberliegenden Seiten und

65. die gegenüberliegenden Winkel des Vierkantes gleich.

66. Sind in einem Vierkant alle Seiten gleich, so stehen die Diagonal-Ebenen senkrecht auf einander.

67. Stehen in einem Vierkant die Ebenen der gegenüberliegenden Kanten senkrecht auf einander und halbiren sich die Winkel dieser Kanten, sind die Seiten des Vierkantes gleich.

68. Hat ein Vierkant lauter gleiche Winkel, so sind die gegenüberliegenden Seiten gleich.

69. Sind in einem Vierkant die gegenüberliegenden Seiten und zwei auf einander folgende Winkel gleich, so sind die Winkel der gegenüberliegenden Kanten gleich.

70. Sind in einem Vierkant die Winkel der gegenüberliegenden Kanten gleich und halbiren sie sich, so sind die gegenüberliegenden Seiten gleich.

71. Stehen außerdem die Diagonal-Ebenen auf einander senkrecht, so sind die Seiten gleich.

72) Im gleichseitigen Vierkant werden die Winkel durch die Diagonal-Ebenen halbirt.

73. Sind die Winkel eines Vierkantes durch die Diagonal-Ebenen halbirt, so sind die Seiten gleich.

74. Denkt man sich auf die Kante der Diagonal-Ebenen eine Ebene senkrecht gelegt, so schneidet diese Ebene das Vierkant in einem Parallelogramm, wenn die gegenüberliegenden Seiten gleich sind;

75. ebenso wenn die gegenüberliegenden Winkel gleich sind;

76. in einem Rechteck, wenn noch dazu zwei auf einander folgende Winkel gleich sind;

77. in einem gleichseitigen Viereck, wenn alle Seiten gleich sind, und

78. in einem Quadrate, wenn außerdem noch zwei auf einander folgende Winkel gleich sind.

79. Gelten 74 — 78 auch umgekehrt?

---

80. Bezeichnet F die Anzahl der Grenzflächen eines Polyeders, E die Anzahl der Ecken und K die Anzahl der Kanten, so ist $F + E = K + 2$. (Euler'scher Satz).

81. In einem regelmäßigen Körper habe jede Grenzfläche n Seiten und an jeder Ecke des Körpers stoßen m Kanten zusammen, so ist (80)

$$K = \frac{2\,mn}{2\,(m+n) - mn};$$

82. $$F = \frac{4\,m}{2\,(m+n) - mn};$$

83. $$E = \frac{4\,m}{2\,(m+n) - mn}.$$

84. Mittels der Gleichungen 81—83 die möglichen regelmäßigen Körper zu bestimmen.

85. Durch den Punkt E der Kante AD eines Tetraeders ist eine Ebene parallel zu den Kanten AB und CD gelegt; Umfang und Inhalt der Durchschnittsfigur mit Umfang und Inhalt einer Grenzfläche zu vergleichen, wenn AE eine bestimmte Größe hat, z. B. $= \frac{1}{2}$ AD oder $\frac{1}{3}$ AD ist.

86. Legt man durch zwei beliebige Seitenkanten eines Prisma eine Ebene, so ist die Durchschnittsfigur ein Parallelogramm.

87. Im Parallelepipedon sind die gegenüberliegenden Flächenwinkel gleich.

88. Die Diagonalen des Parallelepipedons halbiren sich und

89. schneiden sich alle in einem Punkte.

90. Schneidet man ein Prisma durch eine Ebene senkrecht auf die Seitenkanten, so ist das Produkt aus dem Umfang der Durchschnittsfigur und einer Seitenkante gleich der Summe der Seitenflächen, sowohl wenn das Prisma schief, als wenn es senkrecht ist.

91. Die Seitenflächen einer regelmäßigen Pyramide sind zusammen genommen gleich dem Produkt aus dem Umfang der Grundfläche und dem halben Abstand der Spitze von einer Grundkante.

Prismen und ebenso Pyramiden müßen ähnlich sein, wenn die Grenzflächen alle bezüglich ähnlich und die Körperecken bezüglich congruent sind, denn solche Körper sind, sobald sie gleich werden, congruent.

92. Wird eine Pyramide durch eine Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten, so ist die Theil-Pyramide der ganzen ähnlich.

---

93. Welches ist der geometrische Ort jener Punkte, die von einer gegebenen Geraden gleichen, oder

94. einen gegebenen;

95. von einem gegebenen Punkt gleichen, oder

96. einen gegebenen Abstand haben.

97. Durch einen von zwei gegebenen Punkten sind alle durch

denselben möglichen Ebenen gelegt, und auf jede dieser Ebenen ist vom zweiten Punkte aus eine Senkrechte gefällt; den geometrischen Ort der Fußpunkte anzugeben.

98. In einer Kugel sind alle möglichen Sehnen von gegebener Länge = a gezogen; welches ist der geometrische Ort der Halbirungspunkte dieser Sehnen?

99. Durch einen gegebenen Punkt alle möglichen Sehnen von gegebener Länge in einer gegebenen Kugel zu ziehen, wenn der gegebene Punkt in der Oberfläche liegt,

100. der Mittelpunkt der Kugel ist,

101. sonst innerhalb der Kugel,

102. außerhalb der Kugel liegt. Geometrische Örter?

103. Durch einen gegebenen Punkt eine Kugel-Sehne zu ziehen, parallel zu einer gegebenen Geraden, wenn der gegebene Punkt ein Punkt der Kugel ist, und

104. wenn er außerhalb liegt.

105. Geometrischer Ort der Mittelpunkte gleicher Kugelkreise?

106. Desgleichen von gegebener Größe?

107. Den Abstand des Kugel-Mittelpunktes von der Ebene eines Kugelkreises zu berechnen aus der Größe dieses Kreises und der Oberfläche der Kugel.

108. Ebenso, wenn der Kugelkreis einem bestimmten Theil der Kugel-Oberfläche gleich sein soll z. B. $\frac{1}{n}$ oder $\frac{m}{n}$ derselben.

109. In welchem Verhältniß stehen die Abstände des Kugel-Mittelpunktes von den Ebenen zweier Kugelkreise, wenn die Größe der letzteren bekannt ist.

110. Ebenso das Verhältniß der Kreis-Halbmesser, wenn die Abstände bekannt sind.

111. Geometrischer Ort der Geraden, welche eine Kugel in einem gegebenen Punkte der Oberfläche berühren.

112. Ebenso der Fußpunkte aller Tangenten von einem Punkte außerhalb der Kugel, und

113. geometrischer Ort dieser Tangenten selbst.

114. Die Größe einer solchen Tangente zu berechnen, wenn außer dem Kugel-Halbmesser entweder der Abstand des Punktes vom Kugel-Mittelpunkt, oder

115. deßen kleinster Abstand von der Oberfläche bekannt ist. Ebenso

116. die Größe der entstandenen Kugelhaube zu berechnen.

117. Zwei Kugeln haben denselben Mittelpunkt und die kleinere den Halbmesser ϱ, und es ist in der größeren ein Kugelkreis hergestellt, welcher die kleinere berührt; wie groß muß der Halbmesser r der größeren Kugel sein, wenn die Oberfläche der kleineren Kugel und der Kugelkreis einander gleich sein sollen.

118. Ebenso wenn die Oberfläche der kleineren Kugel und der Kugelkreis zusammen halb so groß sein sollen als die Oberfläche der größeren Kugel?

119. Ebenso, wenn sie zusammen $\frac{5}{8}$ der größeren Oberfläche betragen sollen.

120. Ebenso, wenn der Kugelkreis halb so groß sein soll als die Oberfläche der kleineren Kugel.

121. Um die kleinere der beiden Kugeln (oben 117) sei ein gleichseitiger Kegel beschrieben, und der Halbmesser der größeren Kugel sei $\frac{1}{2} \varrho \sqrt{7}$; in welchem Verhältniß steht die Oberfläche der größeren Kugel zur Summe aus der Oberfläche der kleineren Kugel und des Kegels?

122. Berührt eine Kugel die Seiten eines Vierkantes, so sind die Summen der gegenüberliegenden Seiten gleich.

123. Sind in einem Vierkant die Summen der gegenüberliegenden Seiten gleich, so gibt es immer beliebig viele Kugeln, welche die Seiten berühren.

124. Sind in einem Vierkant die Summen der gegenüberliegenden Winkel gleich, so gibt es immer eine Kugel, deren Oberfläche durch den Scheitel und je einen Punkt in jeder Kante geht, wenn diese Punkte vom Scheitel gleichen Abstand haben.

125. Geht die Oberfläche einer Kugel durch den Scheitel und je einen Punkt der Kanten eines Vierkantes, so sind die Summen der gegenüberliegenden Winkel gleich.

126. Sind in einem Vierkant die Summen der gegenüberliegenden Seiten gleich, so schneidet eine Ebene, welche senkrecht auf den Halbirungs-Ebenen zweier auf einander folgender Winkel steht, das Vierkant in einem Viereck, in das sich ein Kreis einschreiben läßt.

127. Sind in einem Vierkant die Summen der gegenüberliegenden Winkel gleich, so schneidet eine Ebene, deren Schnittpunkte mit den Kanten vom Scheitel gleichen Abstand haben, das Vierkant in einem Viereck, um welches sich ein Kreis beschreiben läßt.

128. Für jedes Dreikant laßen sich beliebig viele Kugeln finden, welche alle Seiten berühren und ihre Mittelpunkte liegen in einer Geraden.

129. Wählt man in einem Dreikant in jeder Kante einen beliebigen Punkt, so gibt es immer eine Kugel, welche durch diese drei Punkte und durch den Scheitel geht, oder: um jede dreiseitige Pyramide läßt sich eine Kugel beschreiben.

130. In jede dreiseitige Pyramide läßt sich eine Kugel beschreiben.

---

131. Schneidet man ein schiefes Prisma durch eine Ebene, welche auf einer Seitenkante senkrecht steht, und stellt über der Durchschnittsfigur als Grundfläche ein Prisma her, deßen Höhe gleich ist einer Seitenkante des gegebenen Prisma, so sind die Prismen gleich. Und wie verhält es sich mit ihren Oberflächen?

132. Wird ein dreiseitiges Prisma durch eine Ebene nicht parallel zur Grundfläche geschnitten, so ist der Theil zwischen Grundfläche und Schnitt-Ebene gleich drei Pyramiden, von welchen jede die Grundfläche des Prisma zur Grundfläche hat und deren Höhen bezüglich die Abstände der Ecken der Durchschnittsfigur (Dreieck) von der Grundfläche des Prisma sind.

133. Durch Zerlegung der abgekürzten Pyramide die Formel für den Inhalt zu finden.

134. Die Oberflächen ähnlicher Prismen (und Pyramiden) verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender (Grund- oder Seiten-) Kanten (oder auch der Höhen).

135. Aehnliche Prismen (und Pyramiden) stehen in demselben Verhältniß wie Würfel, welche gleichliegende Kanten (oder die Höhen) dieser Körper zu Kanten haben.

136. Cylinder (und Kegel) müßen ähnlich sein, wenn die Halbmesser der Grundkreise sich wie die Höhen verhalten.

137. In welchem Verhältniß stehen die Grundkreise, die Mäntel, die Oberflächen ähnlicher Cylinder (und Kegel)?

138. In welchem Verhältniß stehen ähnliche Cylinder?

139. Symmetrische Prismen (und Pyramiden) sind gleich.

140. Beliebig viele Pyramiden von gleicher Höhe sind gleich einer Pyramide, wenn letztere mit ihnen gleiche Höhe und die Summe der Grundflächen zur Grundfläche hat.

141. Zieht man durch drei beliebige Punkte im Umfang ei-

nes Kugelkreises Kugel-Durchmesser, so ist der Kugelkreis der drei andern Endpunkte zum gegebenen parallel.

142. Verbindet man den Pol eines Kugelkreises mit einem beliebigen Punkte des Umfanges durch eine Gerade, so ist ein Kreis, welcher diese Gerade zum Halbmesser hat, gleich der betreffenden Kugelhaube.

143. In welchem Verhältniß stehen Kugel-Oberflächen zu einander? in welchem die Kugeln?

144. Aus den Formeln für die Oberflächen der Körper oder für Theile andere Körper oder Theile von Körpern zu bestimmen, deren Oberfläche durch dieselbe Formel ausgedrückt wird. Ebenso beim Inhalt.

145. Den Inhalt des Kegels auszudrücken durch Grundkreis-Halbmesser und Seite.

146. Ebenso beim abgekürzten Kegel.

147. In welchem Verhältniß stehen die Inhalte und in welchen die Oberflächen von Cylinder, Kugel und Kegel, wenn Cylinder und Kegel gleichseitig sind und die Grundkreise gleich sind einem größten Kugelkreise? Ebenso für die Mäntel und die Kugel-Oberfläche.

148. Wie aber, wenn die Höhe gleich ist dem Kugel-Durchmesser?

149. Die Oberfläche der Kugel verhält sich zur Oberfläche des eingeschriebenen gleichseitigen Kegels wie 16 : 9 und zur Oberfläche des umschriebenen wie 4 : 9.

---

150. Kante, Inhalt und Oberfläche eines Würfels aus seiner Diagonale zu bestimmen. (Umkehrungen).

151. Wie weit steht der Schnittpunkt der Diagonalen des Würfels von den Grenzflächen und Ecken ab? (Eingeschriebene und umschriebene Kugel).

152. Einen Würfel von doppelter Oberfläche, von doppeltem Inhalt herzustellen; Kante?

153. Die Kante eines Würfels zu berechnen, welcher mehrere gegebenen Würfeln gleich ist.

154. Einen Würfel von gegebenem Inhalt herzustellen, z. B. gleich einem gegebenen Tetraeder.

155. Wie groß ist die Kante eines Würfels, wenn Oberfläche

und Inhalt durch dieselbe Zahl ausgedrückt sind, d. h. wenn die Oberfläche ebensoviele Flächen-, als der Inhalt Körpereinheiten hat?

156. Kante und Diagonale eines Würfels zu berechnen, wenn außer ihrer Summe (oder Differenz) der Inhalt (oder die Oberfläche) bekannt ist.

157. Aus der Summe aller Kanten zweier Würfel und aus der Summe der Inhalte die Kanten zu finden.

158. Die Diagonale eines Parallelepipedons, welches lauter R hat, aus den an einer Ecke zusammenstoßenden Kanten a, b, c zu berechnen.

159. In einem durchaus rechtwinkligen Parallelepipedon ist bekannt $a : b = m : n$ und $b : c = p : q$, ferner der Inhalt; die Kanten zu berechnen.

160. Kanten und Oberfläche eines Parallelepipedons mit lauter R zu bestimmen aus Diagonale d, Seitenfläche s und Inhalt J.

161. Ebenso, wenn die Grundfläche ein gegebenes Quadrat und der Umfang einer Seitenfläche bekannt ist.

162. In einem Parallelepipedon mit lauter R ist bekannt die Summe dreier Kanten an einer Ecke, die Oberfläche und der Inhalt; die Kanten zu bestimmen. (Gl. 3. Gr.).

163. Einem Kreise ist ein regelmäßiges Fünfeck, Sechseck und Zehneck eingeschrieben, und je über einer Seite dieser Figuren ein Quadrat, sodann über den Quadraten Parallelepipede von gleicher Höhe hergestellt; wie groß ist das erste derselben in Vergleich mit der Summe aus dem zweiten und dritten?

164. In einem Parallelepipedon ist in jeder Grundfläche eine Diagonale hergestellt und die Halbirungspunkte der Diagonalen sind durch eine Gerade verbunden. Zu beweisen, daß das Parallelepipedon durch jede Ebene halbirt wird, welche durch den Halbirungspunkt der Verbindungslinie geht.

165. Ein Prisma von gegebener Grundfläche und Höhe soll durch Construction in n gleiche Theile zerlegt und die Kante des Würfels berechnet werden, welcher einem solchen Theile gleich ist.

166. Die Grundfläche eines Prismas ist ein Trapez, deßen Parallelen um 6 verschieden sind, und deßen Höhe 5 ist; wie groß sind die Parallelen, wenn das Prisma 3375 Inhalt hat?

167. Die Höhe eines dreiseitigen Prismas vom Inhalte 3937·5 beträgt $16 \frac{5}{8}$, und die ungleiche Seite der gleichschenkligen Grundfläche 24; wie groß ist eine der zwei gleichen Seiten?

168. Ueber einem eingeschriebenen regelmäßigen Zwölfeck ist ein Prisma von beliebiger Höhe hergestellt; wie vielmal ist dasselbe größer als ein Parallelepipedon, das mit ihm gleiche Höhe und zur Grundfläche ein Quadrat hat, deßen Seite dem Halbmesser des Kreises gleich ist?

169. Die Summen der Prismen zu berechnen, welche im Beweis für die Gleichheit der Pyramiden vorkommen. (R . 2 . O.).

170. Der Halbirungspunkt der Höhe eines Prismas ist durch Gerade mit allen Ecken der Grundfläche verbunden; wie groß ist die hiedurch bestimmte Pyramide in Vergleich mit dem Prisma?

171. Welchen Abstand hat aber die Spitze der Pyramide (vor. Aufg.) von jeder der beiden Grundflächen des Prismas, wenn die Pyramide einen bestimmten Theil desselben, z. B. $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{9}$ ausmachen soll, oder wenn z. B. $\frac{7}{8}$ des Prismas übrig bleiben sollen?

172. Ein Prisma wird durch eine Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten und über der Durchschnittsfigur als Grundfläche sind zwei Pyramiden hergestellt, deren Spitzen in den beiden Grundflächen des Prismas liegen; wie groß sind beide Pyramiden zusammen?

173. Ueber jeder der beiden Grundflächen eines beliebigen Prismas ist eine Pyramide hergestellt mit gemeinschaftlicher Spitze; wie groß sind jedesmal beide Pyramiden zusammen genommen, wenn die gemeinsame Spitze zwischen den Ebenen der Grundflächen liegt?

174. In einem dreiseitigen Prisma mit den Grundflächen ABC und abc ist auf den Seitenkanten Aa und Bb ein Theil aa' $= \frac{1}{3}$ Aa $=$ bb' genommen, sodann seien die Geraden ca' und cb' gezogen und bis zum Durchschnitt mit der Ebene der Grundfläche ABC verlängert, und die Schnittpunkte mögen A' und B' heißen; wie groß ist die durch die Punkte A', B', C und c bestimmte Pyramide in Vergleich mit dem Prisma?

175. Wie groß muß A'B'C in Vergleich mit ABC und aa' in Vergleich mit Aa sein, wenn die Pyramide dem Prisma gleich sein soll?

176. Wie groß aber, wenn die Pyramide m mal, oder $\frac{1}{n}$ mal das Prisma enthalten soll?

177. Welchen Abstand von den Grundflächen des Prismas hat die Spitze c' der über A'B'C hergestellten Pyramide, wenn aa' $= \frac{1}{n}$ Aa und die Pyramide gleich dem m fachen Prisma sein soll?

178. Die Grundfläche einer Pyramide ist ein gleichseitiges Dreieck und jede Seitenkante ist = b; wie groß ist der Inhalt?

179. Den Inhalt des Tetraeders aus einer der Größen: Kante, Höhe, Seitenfläche oder Oberfläche zu berechnen.

180. Den Inhalt einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide zu berechnen aus Grundkante a und Seitenkante b.

181. Ebenso wenn jede Kante = a ist.

182. Oberfläche und Inhalt des Oktaeders aus einer Kante zu berechnen.

183. Aus der Grundkante und der Summe oder Differenz von Seitenkante und Höhe einer vierseitigen regelmäßigen Pyramide Oberfläche und Inhalt durch Rechnung, und Höhe und Seitenkante durch Construction zu bestimmen.

184. Wie groß ist die Kante einer solchen Pyramide, wenn sie gleichkantig ist und Oberfläche und Inhalt durch dieselbe Zahl ausgedrückt werden.

185. Die Grundfläche G einer Pyramide hat eine Seite a und die gleichliegende Seite der parallelen Durchschnittsfigur ist a'; welche Abstände hat letztere von Spitze und Grundfläche, wenn h die Höhe der Pyramide ist.

186. Eine abgekürzte Pyramide soll durch eine Ebene parallel zu den Grundflächen so geschnitten werden, daß die Durchschnitts-Figur das geometrische Mittel ist zwischen den beiden Grundflächen; welchen Abstand hat sie von der kleineren Grundfläche?

187. Durch eine zur Grundfläche parallele Ebene von einer Pyramide einen Theil von gegebenem Inhalt abzuschneiden.

188. Welche Lage muß die Ebene haben, wenn die beiden Theile in gegebenem Verhältniß stehen?

189. Eine Pyramide durch eine Ebene parallel zur Grundfläche in Theile zu zerlegen, welche in gegebenem Verhältniß stehen z. B. m : n : p.

190. Die Aufgaben 187—189 bezüglich der abgekürzten Pyramide.

191. Aus Grundkreis und Mantel den Inhalt des Cylinders zu berechnen.

192. Aus Summe (oder Diff.) von Mantel und Grundkreis des Cylinders Halbmesser und Höhe zu berechnen, wenn das Verhältniß dieser Geraden = m : n ist.

193. Aus dem Verhältniß von Grundkreis und Mantel ei-

nes Cylinders und aus der Summe (Diff.) von Halbmesser und und Höhe diese Geraden zu berechnen.

194. Ebenso, wenn statt des Verhältnißes von Grundkreis und Mantel der Mantel bekannt ist.

195. Aus Mantel und Inhalt des Cylinders die Höhe zu bestimmen.

196. Ebenso aus Mantel und Umfang des Grundkreises den Inhalt.

197. Der Cylinder ist halb so groß als ein Parallelepipedon, welches den Mantel des Cylinders zur Grundfläche und den Halbmesser des Grundkreises zur Höhe hat.

198. Aus einem Cylinder ist ein anderer von gleicher Höhe und gemeinschaftlicher Axe herausgenommen; welchen Grundkreis-Halbmesser müßte ein dritter Cylinder haben, der dem verbleibenden Körper (Röhre) gleich ist und mit dem gegebenen Cylinder gleiche Höhe hat?

199. Aus Dicke (R — r), Höhe und Inhalt der Röhre die Halbmesser der beiden Grundkreise zu bestimmen.

200. Aus der Oberfläche eines gleichseitigen Cylinders den Inhalt zu berechnen und umgekehrt.

201. Welche Gleichung muß zwischen Grundkreis-Halbmesser und Höhe eines Cylinders bestehen, wenn Oberfläche und Inhalt durch dieselbe Zahl ausgedrückt sein sollen?

202. Innerhalb eines Kreises (Halbmesser R) befindet sich ein anderer (r) und über letzterem ist ein gleichseitiger Cylinder hergestellt; wie groß muß R sein, wenn der Mantel gleich ist dem Ringe beider Kreise?

203. Einem Dreiecke vom Umfange $2\ r\ \pi$ ist ein Kreis (ϱ) eingeschrieben und über letzterem ein Cylinder hergestellt, deßen Mantel eben so groß ist, als was der Kreis vom Dreieck übrig läßt; wie groß ist die Höhe des Cylinders?

204. Aus Höhe, oder Grundkreis, oder Mantel, oder Inhalt eines gleichseitigen Cylinders je die andern Größen zu berechnen.

205. Dem Grundkreise eines gleichseitigen Kegels ist ein reg. Sechseck, und diesem wiederum ein Kreis eingeschrieben, welcher die Grundfläche eines dem ersteren ähnlichen Kegels ist; wie groß ist der Abstand der Spitzen beider Kegel?

206. Ein gleichseitiges Dreieck wird um eine Seite vollstän-

dig gedreht; Oberfläche und Inhalt des entstehenden Doppelkegels zu berechnen.

207. Welchen Inhalt hat der Hohlkegel, welcher durch Umdrehung eines stumpfwinkligen Dreiecks um seine kleinste Seite entsteht, z. B. für die Seiten 5, 29, 30.

208. Welche Gleichung besteht zwischen Höhe und Grundkreis-Halbmesser eines Kegels, wenn sein Inhalt und Mantel durch dieselbe Zahl ausgedrückt werden?

209. Aus der Oberfläche eines Kegels den Inhalt zu berechnen, wenn die Höhe oder ihr Verhältniß zum Grundkreis-Halbmesser bekannt ist.

210. Der Mantel eines Kegels gibt, in eine Ebene abgewickelt, einen Quadraten (Octanten, Sextanten) von bekannter Größe; den Winkel zu bestimmen, welchen die Axe des Kegels mit einer Seite desselben bildet.

211. Grundkreis-Halbmesser und Höhe eines Kegels verhalten sich wie 12 : 5; wie groß ist der Mittelpunktswinkel des Kreis-Ausschnittes, welchen der Mantel ergibt?

212. Grundkreis-Halbmesser und Höhe eines Kegels verhalten sich wie 8 : 15, und in einem Cylinder wie 1 : 17; wie groß ist der Grundkreis-Halbmesser des letztern, wenn die Mäntel gleich sind?

213. Aus dem Inhalt eines Kegels und dem Verhältniß von Grundkreis-Halbmesser und Seite die Oberfläche zu berechnen.

214. Der Grundkreis-Halbmesser eines Kegels ist das geometrische Mittel zwischen seiner Höhe und dem Grundkreis-Halbmesser eines Cylinders, deßen Mantel dem Grundkreise des Kegels gleich ist; wie groß ist die Höhe des Cylinders?

215. Einen Kegel durch eine Ebene parallel zum Grundkreise so zu schneiden, daß die beiden Theile des Mantels gleich sind, oder in gegebenem Verhältniß stehen.

216. Einen Kegel durch eine Ebene parallel zum Grundkreise zu schneiden, so daß der Mantel des abgekürzten Kegels gleich ist der Summe aus Grundkreis und Durchschnittsfigur. (Für den Abstand der beiden Ebenen ergibt sich ein für die Construction sehr bequemer Ausdruck).

217. Aus Mantel, Seite und Verhältniß der Grundkreis-Halbmesser eines abgekürzten Kegels diese Halbmesser zu bestimmen.

218. Die Oberfläche eines abgekürzten Kegels beträgt 162 π,

die Seite 5 und das geometrische Mittel der Grundkreis-Halbmesser 6; wie groß sind sie?

219. Ein Kegel und ein abgekürzter Kegel haben gleiche Höhe, und der Grundkreis-Halbmesser des ersteren ist gleich der Summe der Halbmesser des abg. Kegels. Es soll gezeigt werden, daß, wenn man den Unterschied beider Körper in eine Kugel verwandelt, ein Würfel mit dem Halbmesser dieser Kugel als Kante viermal kleiner ist als ein durchaus rechtw. Parallelepipedon mit R, r, h des abg. Kegels als Kanten.

220. Den Halbmesser der Kugel zu bestimmen aus Umfang oder Inhalt eines größten Kreises, oder aus Oberfläche oder Inhalt der Kugel.

221. Die Oberfläche einer Kugel in eine beliebige Zahl gleicher Theile zu zerlegen [212].

222. Wie groß ist der Durchmesser einer Kugel, welche n mal so groß ist als eine gegebene Kugel, oder mehrere gegebene Kugeln zusammengenommen?

223. Wie groß ist hiebei der Unterschied der Oberflächen?

224. In welchem Verhältniß stehen die Inhalte von Kugeln?

225. Wie groß ist der Halbmesser einer Kugel, bei welcher Oberfläche und Inhalt durch dieselbe Zahl ausgedrückt sind?

226. Ein Gefäß hat eine würfelförmige Höhlung mit 1 M. Kante, und in die Höhlung sind soviele Kugeln als möglich gelegt, jede mit 1 Decimeter Durchmesser; wie groß ist der durch diese Kugeln nicht ausgefüllte Raum der Höhlung?

227. Wie viele Kugeln von 1 Cent. Durchmesser haben zusammen den nämlichen Inhalt wie ein Würfel mit der Kante 1 M., und wie groß ist die Höhe eines gleichseitigen Kegels, deßen Oberfläche gleich ist dem Unterschiede aus der Summe der Kugel-Oberflächen und aus der Oberfläche des Würfels?

228. Um wie viel ist eine Kugel bei gleicher Oberfläche größer als Würfel, Tetraeder oder Octaeder?

229. Um wie viel ist bei gleichem Inhalt die Oberfläche der Kugel kleiner als die Oberfläche dieser Körper?

230. Aus einer Kugel ist eine andere herausgenommen; wie groß ist die Oberfläche eines gleichseitigen Cylinders, welcher mit dem verbleibenden Körper gleichen Inhalt hat?

231. Aus einer Kugel (r) wird ein Theil herausgebohrt, und zwar so, daß der herausgenommene Körper von einer Kugelhaube

und einem Kegelmantel begränzt ist, deßen Spitze der Kugel-Mittelpunkt ist; wie groß ist die Oberfläche und wie groß der Inhalt des verbleibenden Körpers, wenn zwei gegenüberliegende Seiten des Kegelmantels unter 60, 30, 45° gegen einander geneigt sind?

232. Wie aber, wenn die Axe des Kegelmantels zwar auch durch den Kugel-Mittelpunkt geht, die Spitze aber in der Oberfläche der Kugel liegt?

233. Aus dem Verhältniß der Oberflächen von zwei regelmäßigen Körpern z. B. von zwei Würfeln, das Verhältniß der Inhalte zu bestimmen und umgekehrt.

234. Sind R und r die Halbmesser der Kugelkreise einer Zone, und ist h die Höhe, so ist

$$\text{K. Inhalt d. Zone} = \frac{1}{6}\,\pi\,h\,(3\,R^2 + 3\,r^2 + h^2).$$

235. Ist r der Halbmesser eines Kugelkreises und h die Höhe des Kugel-Abschnittes, so ist

$$\text{Kugel-Abschnitt} = \frac{1}{2}\,\pi\,h\,(r^2 + \frac{1}{3}\,h^2).$$

236. Wie groß ist der keilförmige Ausschnitt der Erdkugel (r = 859·5 M.) zwischen den Meridianen zweier Orte, welche z. B. 6° 6′ westliche und 33° 54′ östliche Länge haben, und wie, wenn beide Längen gleichnamig sind? Wie groß sind die betreffenden Kugel-Zweiecke?

237. Die Oberfläche eines kegelförmigen Ausschnittes ist gleich dem vierten Theile der Kugel-Oberfläche; wie groß ist der Halbmesser der Kugel ausgedrückt durch die Höhe des betreffenden Kugel-Abschnittes?

238. Eine Kugel durch eine Ebene zu schneiden, so daß der Kugel-Abschnitt zum Ausschnitt ein gegebenes Verhältniß m : n hat.

239. Welche Höhe hat der Abschnitt eines kegelf. Ausschnittes, wenn dieser Ausschnitt gleich ist einer Kugel mit der fraglichen Höhe als Halbmesser?

---

240. Sollen Oberfläche und Inhalt eines Parallelepipedons mit lauter R durch dieselbe Zahl ausgedrückt sein, so ist die Summe der reciproken Werthe der drei Kanten an derselben Ecke $= \frac{1}{2}$.

241. Ueber der einen Grenzfläche eines Würfels ist eine regelmäßige Pyramide hergestellt; wie groß ist ihre Seitenkante, wenn Pyramide und Würfel gleiche Oberfläche haben?

142. Wie groß aber bei gleichem Inhalt?

243. Ein Tetraeder durch eine Ebene parallel zu einer der Grenzflächen zu schneiden, so daß die drei entstehenden Trapeze zusammen gleich sind einer solchen Grenzfläche.

244. Die sämmtlichen Ecken eines Würfels werden so abgestumpft, daß der verbleibende Körper von 6 congruenten reg. 8 Ecken und von 8 congruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzt ist; Oberfläche und Inhalt desselben zu bestimmen.

245. Ueber einem solchen Dreieck und über einem der Achtecke ist eine Pyramide errichtet; in welchem Verhältniß stehen diese Pyramiden, wenn sie den Mittelpunkt des Würfels zur gemeinsamen Spitze haben?

246. In welchem Verhältniß stehen bei gleichen Kanten die Oberflächen von Würfel, Tetraeder und Octaeder, und in welchem Verhältniß diese Körper selbst?

247. In welchem Verhältniß stehen die Kanten dieser Körper bei gleicher Oberfläche oder bei gleichem Inhalt?

248. In einem Octaeder sind die Scheitel von zwei gegenüberliegenden Vierkanten durch eine Gerade verbunden, sodann ist diese Verbindungslinie in 3 gleiche Theile zerlegt und durch jeden der beiden Theilpunkte eine Ebene gelegt parallel zur Ebene der andern Scheitel; wie groß ist das durch die Durchschnittsfiguren und deren Abstand bestimmte Parallelepipedon?

249. Wie groß muß aber jeder der beiden Theile der Verbindungslinie an den Scheiteln sein, damit der betreffende Körper ein Würfel wird?

250. In die eine Grenzfläche eines Tetraeders ist ein Kreis einbeschrieben und über demselben sowohl ein Kegel als ein Cylinder, beide von gleicher Höhe mit dem Tetraeder, hergestellt; es sollen die Verhältniße von Kegelmantel und einer Grenzfläche des Tetraeders, dann von Cylinder und Tetraeder verglichen werden.

251. Ueber dem einer Grenzfläche des Tetraeders eingeschriebenen Kreise ist ein Kegel von gleicher Höhe mit dem Tetraeder hergestellt; wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, welcher dreimal so groß ist als die Oberfläche dieses Kegels?

252. Wie groß ist aber der Halbmesser einer Kugel, deren Oberfläche der dritte Theil der Kegel-Oberfläche ist?

253. Einem Würfel ist ein Cylinder eingeschrieben; wie groß ist der Halbmesser einer Kugel, deren Oberfläche $2\frac{2}{3}$ mal so groß ist als jene des Cylinders?

254. Wie groß, wenn die Kugel dem Cylinder gleich sein soll?

255. Die Höhe eines Kegels ist gleich der Seite des dem Grundkreise eingeschriebenen reg. Dreieckes, und der Kegel ist durch eine Ebene parallel zum Grundkreise so geschnitten, daß der Mantel des Theilkegels gleich ist dem Grundkreise des gegebenen Kegels; wie groß ist der Halbmesser des letzteren in Vergleich jenem der Durchschnittsfigur?

256. Ebenso, wenn die Oberfläche des Theilkegels gleich sein soll dem Grundkreise des gegebenen Kegels?

257. Grundkreis-Halbmesser und Höhe eines Kegels verhalten sich wie 4 : 3; wie groß ist der Grundkreis-Halbmesser eines Cylinders, welcher mit dem Kegel gleiche Oberfläche und die Axe gemeinsam hat?

258. Einen Kegel durch eine Ebene parallel zum Grundkreise so zu schneiden, daß der Grundkreis um den Mantel des Theilkegels größer ist als die Durchschnittsfigur. Wie groß ist der Halbmesser der Durchschnittsfigur und wie kann er durch Construction gefunden werden aus Grundkreis-Halbmesser und Seite des gegebenen Kegels?

259. Wie aber, wenn statt der Seite des gegebenen Kegels seine Höhe gegeben ist?

260. In einem abgekürzten Kegel verhält sich die Höhe zum Halbmesser R des größeren Grundkreises wie $\sqrt{2} : 15 \sqrt{7}$; das Verhältniß von R und r zu bestimmen, wenn der Mantel gleich ist dem größeren Grundkreise. (Gl. 4. Gr. für $\frac{R}{r}$).

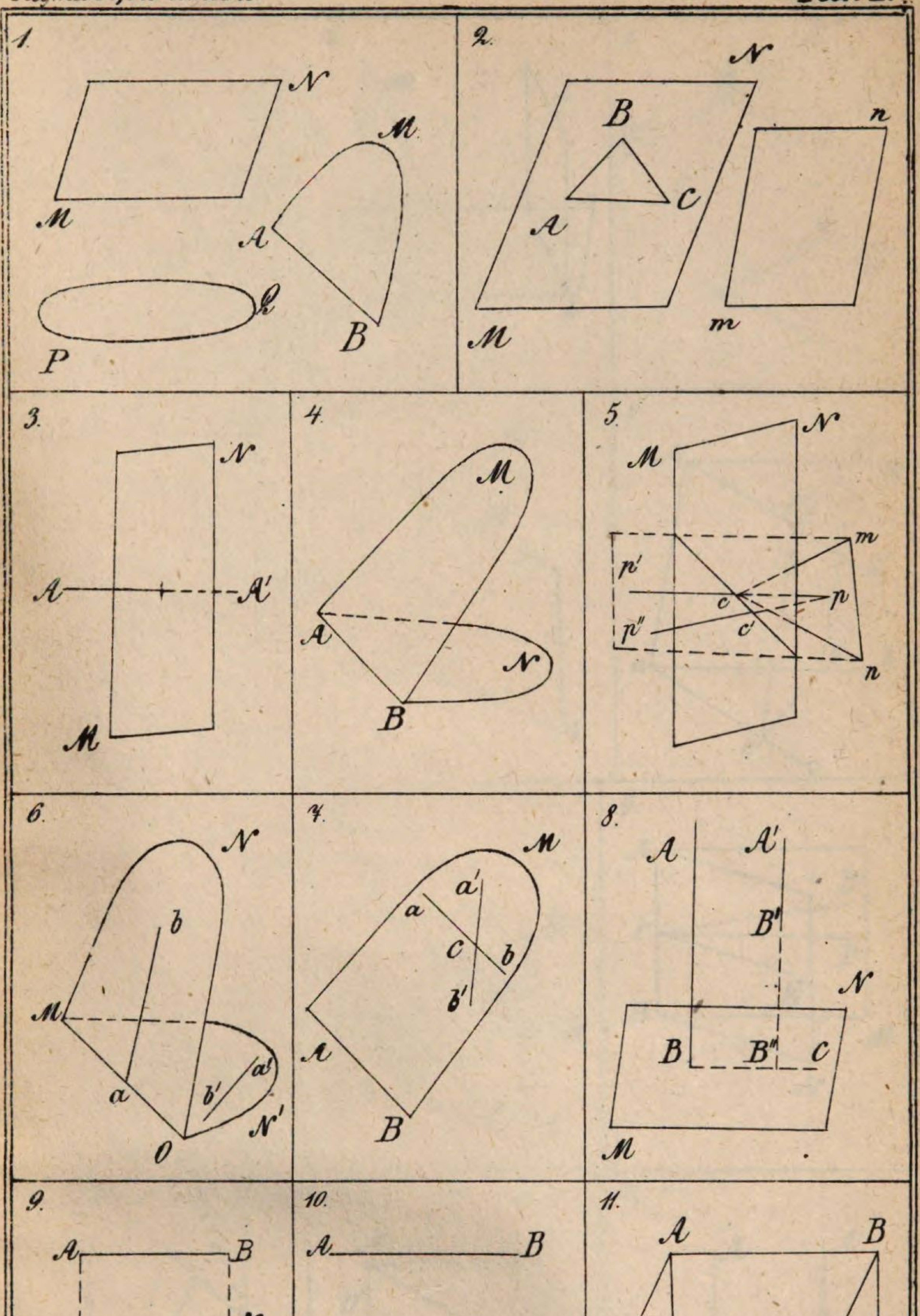
261. Welche Höhe hat ein Kugelabschnitt, wenn die Haube gleich ist der Oberfläche jener Kugel, welche diese Höhe zum Halbmesser hat?

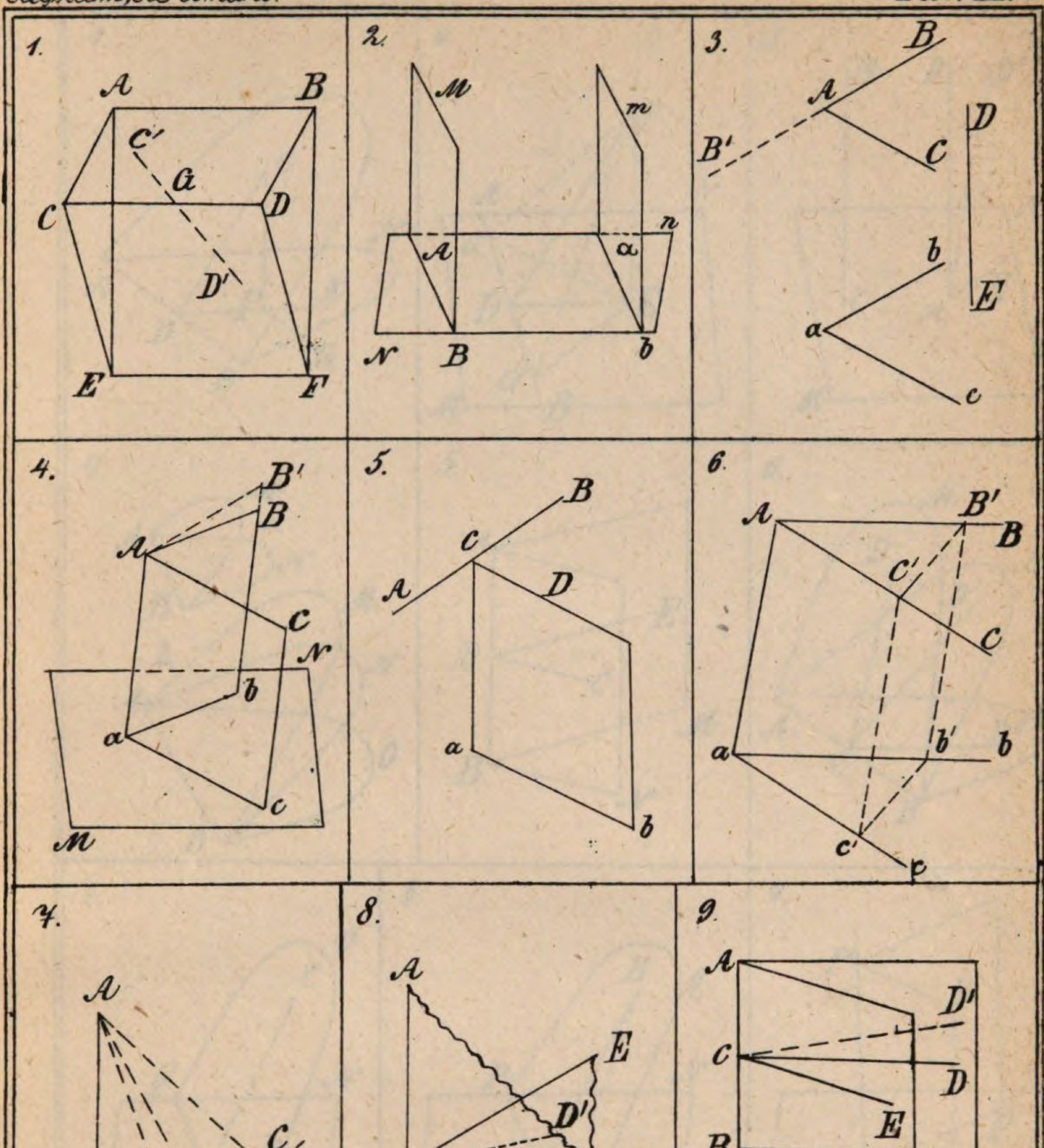
262. Wie aber, wenn die ganze Oberfläche des Abschnittes gleich sein soll der Oberfläche dieser Kugel?

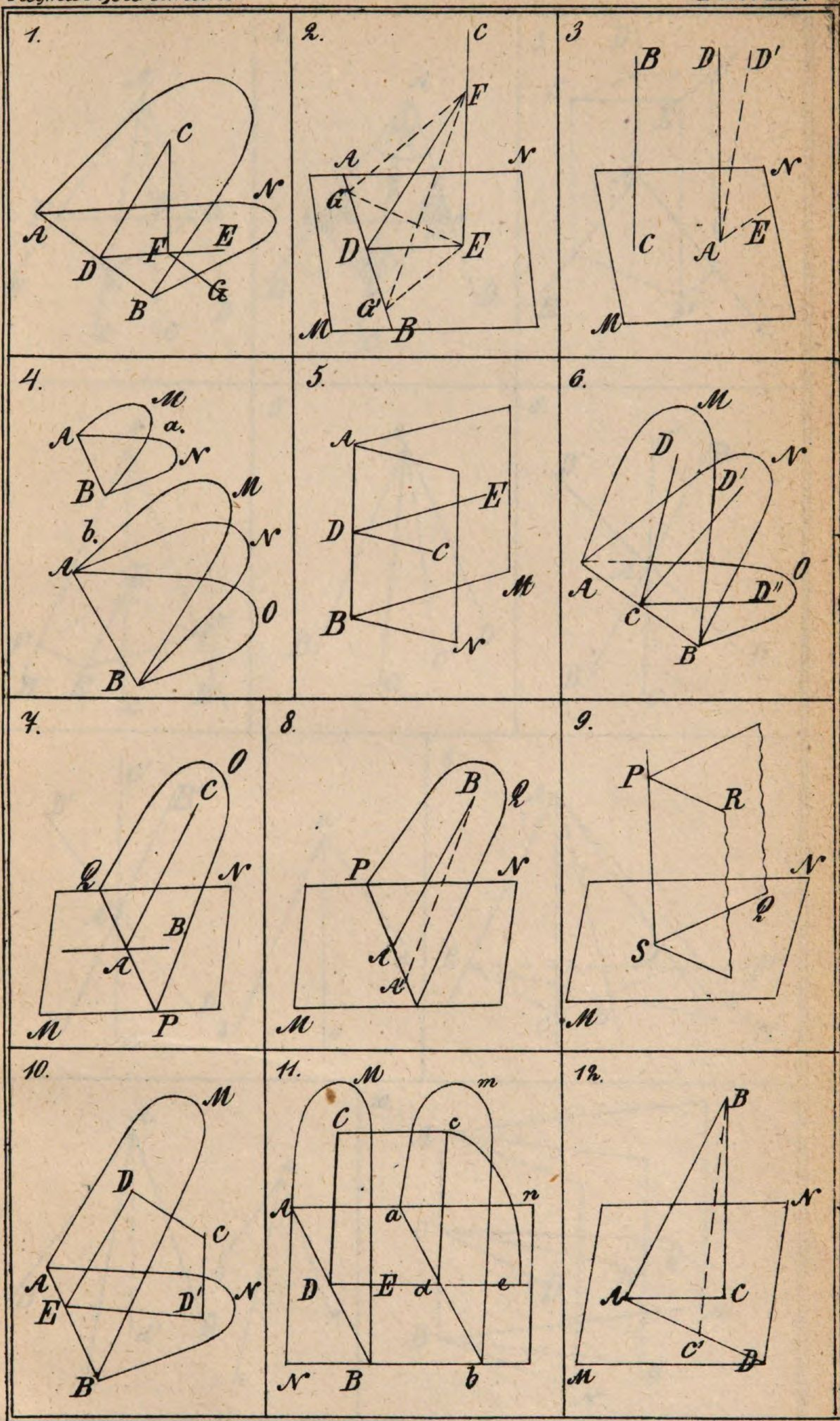
263. Ueber einem Kugelkreise ist ein Kegel hergestellt mit dem Kugelmittelpunkt als Spitze; den Halbmesser der Kugel zu bestimmen, welche diesem Kegel gleich ist.

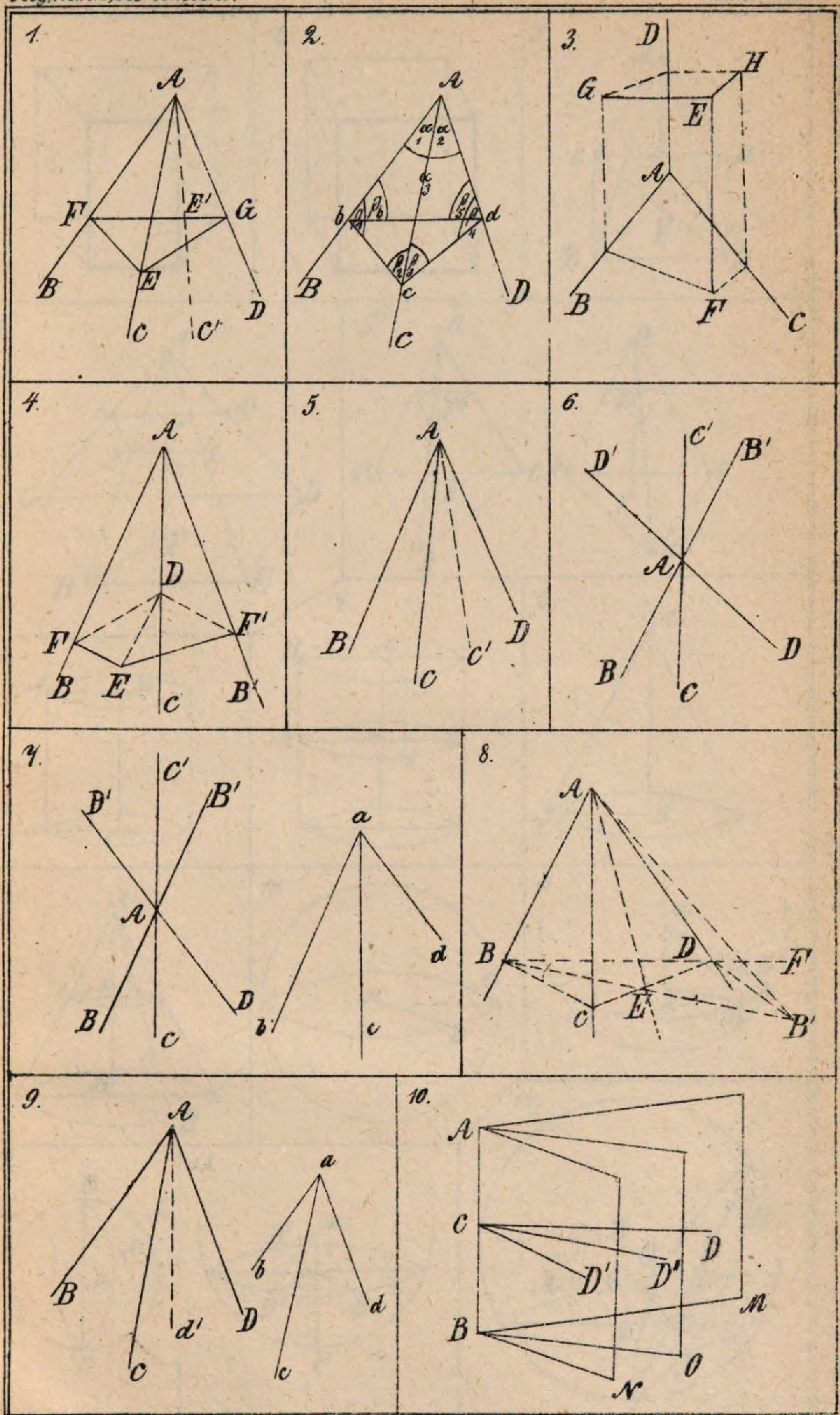
264. Die Haube ist bei einem kegelförmigen Ausschnitt dem Mantel gleich; wie groß ist die Höhe der Haube und wie groß die Höhe des Kegels?

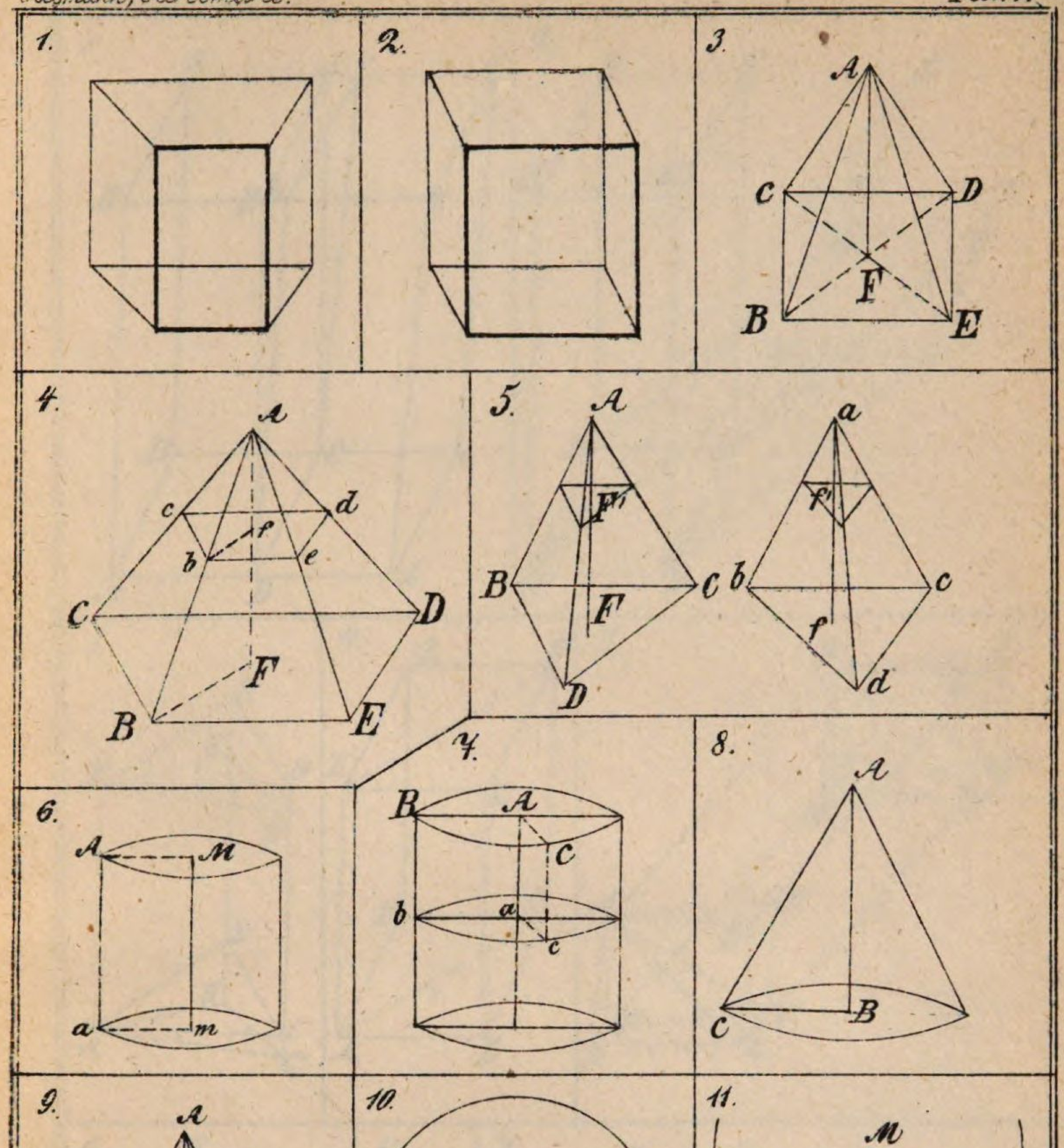
265. Der Kugelabschnitt ist bei einem kegelförmigen Ausschnitt gleich dem Kegel; wie groß ist der Ausschnitt?

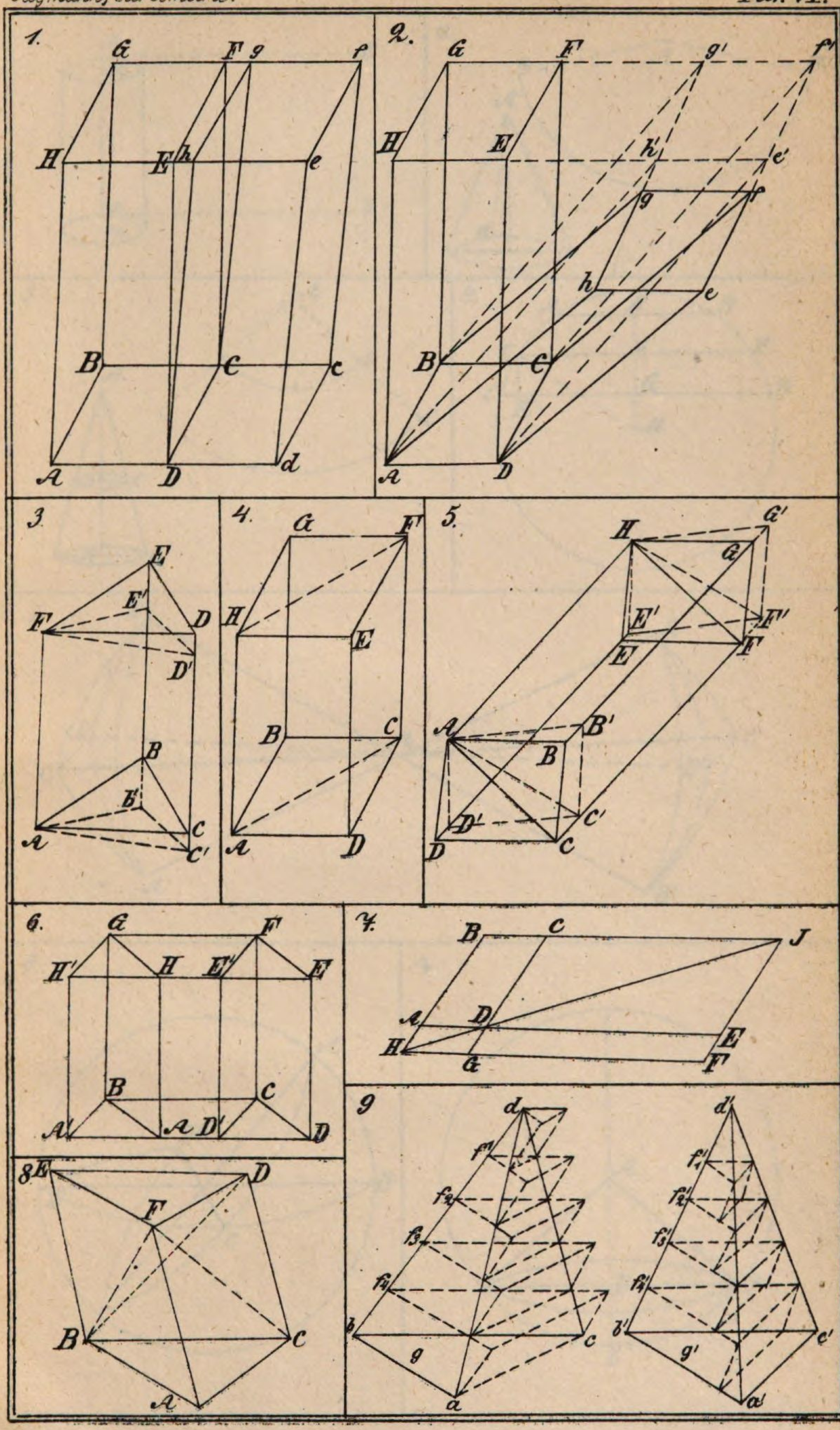

1.
N
M
M
A
Q
B
P
2.
N
B
n
C
A
M
m
3.
N
A
A'
M
4.
M
A
N
B
5.
N
M
m
p'
c
p
p''
c'
n
6.
N
b
M
a
b'
a'
N'
O
7.
M
a'
a
c
b
b'
A
B
8.
A
A'
B'
N
B
B''
C
M
9.
A
B
N
a
b
M
10.
A
B
N
a'
a
b
b'
M
11.
A
B
C
D
E
F

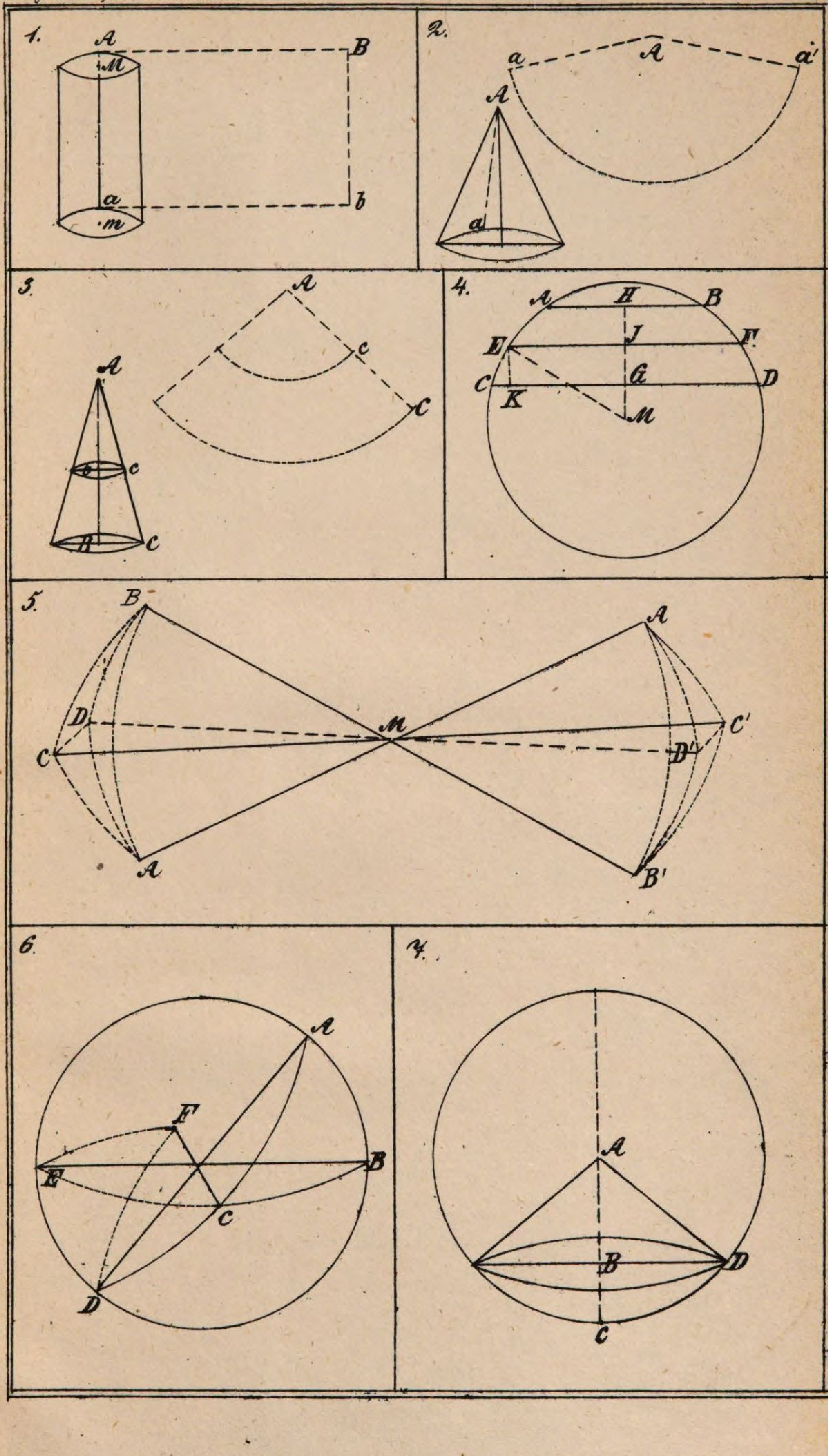

1.
A B C′ a C D D′ E F
2.
M m n A a N B b
3.
B A B′ C D b E a c
4.
B′ B A C N b a c M
5.
B C A D a b
6.
A B′ B C′ C a b′ b c′ c
7.
A C B F E D A′
8.
A E D′ B D C
9.
A D′ C D E B M N
10.
A D′ D C E B M N
11.
A A′ N C C′ B B′ D D′ M


1. C A N F E D B G
2. C F A N G D E G' M B
3 B D D' N C A E M
4. M A a. N B b. M A N O B
5. A E D C M B N
6. M D N D' O A D" C B
7. O C Q N B A M P
8. B Q P N A A' M
9. P R N Q S M
10. M D C A N E D' B
11. M m C c A a n D E d e N B b
12. B N A C C' D M


1. A F E' G B E D C C'
2. A b d B c D C
3. D H G E A B F C
4. A D F F' B E C B'
5. A B C C' D
6. C' D' B' A B C D
7. C' D' B' A B C D a d b c
8. A B D F' C E B'
9. A B C d' D a b d c
10. A C D D' D' B M O N


1.
2.
3.
A C D F B E
4.
A c d f b e C D F B E
5.
A F' B C F D
a f' b c f d
6.
A M a m
7.
B A C b a c
8.
A C B
9.
A c b d C B D
10.
A M B
11.
M B' A B
12.
B A A' M C
13.
B' M A B'' B P
14.
H G' D A G C F' E F B


1.
G F g f
H E h e
B C c
A D d
2.
G F g' f'
H E h' e'
g f
h e
B C
A D
3
E E' F D D'
B B'
A C C'
4.
G F
H E
B C
A D
5.
H G' G
E' F'' E F
A B' B
D' C'
D C
6.
G F
H' H E' E
B C
A' A D' D
7.
B C J
A D
H E
G F
8 E D
F
B C
A
9
d f1 f2 f3 f4 b g c a
d' f1' f2' f3' f4' b' g' c' a'


1.
A
B
M
a
b
m
2.
a
A
a'
A
a
3.
A
c
A
C
c
B
C
4.
A
H
B
E
J
F
C
G
D
K
M
5.
B
A
D
M
C'
C
D'
A
B'
6.
A
F
E
B
C
D
7.
A
B
D
C

Mösch, F., **Neue französische Schulgrammatik.** I. Theil. Preis 1 M. 40 ₰.

— — **Die Regeln der französischen Sprache** in Frage und Antwort. Preis 70 ₰.

Nikl, A., **Wahrheit im Gewande der Dichtung.** 8°. 1 M. 50 ₰.

Neue Reichsmünztabelle für Süddeutschland. Umwandlung von Gulden und Kreuzern in Mark und Pfennige und umgekehrt in abgerundeten Werthen. 8°. 1 Bl. Carton. Preis 8 ₰, aufgezogen 18 ₰.

Reindel, Franz, **Leitfaden der Geografie.** Mit 24 Kärtchen in Holzschnitt und 1 Nachtrag, enthaltend die Veränderungen seit 1871. kl. 8°. Preis 1 M. 20 ₰.

Schelle, Lehrgang in der populären Astronomie und mathematischen Geografie, für Gymnasien bearbeitet. 8°. Mit 6 Figurentafeln. Preis 1 M. 20 ₰. (Vom kgl. b. Ministerium zum Gebrauche an den Studien-Anstalten genehmigt.)

Steck und Bielmayr, Lehrbuch der Arithmetik für Lateinschulen. 8°. Vierte verbesserte Auflage. 1875. Preis 1 M. 20 ₰. (Zum Gebrauche an den Studienanstalten des Königreichs Bayern genehmigt.)

Auf 110 Seiten werden die Regeln der Arithmetik (die 4 Grundoperationen mit ganzen Zahlen, gemeinen und Dezimalbrüchen, die Schlußrechnung, die Proportionen, die Kettenregel, die Gesellschafts- und Mischungsrechnung, sowie die Kettenbrüche umfassend) an Beispielen entwickelt und in präciser Fassung festgestellt. Der Nutzen des Werkchens für Lateinschulen ist unbestreitbar; aber auch für Volksschulen, wenn auch nicht für die Hand der Schüler, so doch für die Hand des Lehrers, ist es zu empfehlen, da es sich durch Klarheit der Darstellung und durch Korrektheit des Ausdrucks auszeichnet. [Krit.-pädag. Vierteljahrsschrift IV. 4.]

Steck und Bielmayr, Sammlung von arithmetischen Aufgaben. 1875. 8°. Zweite Auflage. broch. Preis 95 ₰. (Die dritte Auflage erscheint noch im Laufe des Jahres 1875.)

Resultate dazu. Preis 50 ₰.

Stegmann, A., Die Grundlehren der Ebenen Geometrie. Mit 9 Figurentafeln. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. 8°. Preis 2 M. (Zum Gebrauche an den Studienanstalten des Königreichs Bayern genehmigt.)

Weishaupt, Dr., Professor am k. Gymnasium in Kempten, **Sammlung von französischen Wörtern und Redensarten mit Angabe der Abstammung,** oder **Vocabulaire étymologique,** sammt einem Anhange über das Geschlecht der franz. Hauptwörter. Für Gymnasien und Lateinschulen bearbeitet. 8°. 1866. Preis 1 M. 40 ₰.

Buchdruckerei der Jos. Kösel'schen Buchhandlung in Kempten.